

L'esplorazione del moto: una continua sorpresa

Bonaventura Paolillo*

*Docente di Matematica e Fisica al Liceo Scientifico Severi di Salerno;
Tutor Coordinatore A027, (2023-2024)-Università degli Studi di Salerno
bonaventura.paolillo@liceoseverisalerno.net



DOI: 10.53159/PdM(IV).v7n3.161

Sunto: *Il calcolo differenziale e integrale, insegnato nelle scuole superiori, si sviluppa sul concetto di funzione reale. Però gli strumenti di calcolo non vengono utilizzati spesso in altre aree, come per esempio in Cinematica. È necessario realizzare attività laboratoriali che forniscano una significativa consapevolezza nella crescita di queste competenze. La descrizione del moto, in questa sede, sarà elaborata in contesti reali, utilizzando risultati come il Teorema degli Zeri, che ha carattere di continuità, e i Teoremi di Lagrange, Rolle e Cauchy, che hanno carattere di differenziabilità. Verrà considerato anche l'integrale definito, dal punto di vista cinematico.*

Parole Chiave: Moto, Cinematica, Calcolo.

Abstract: *Differential and integral calculus, taught in high schools, develops on the concept of real function. However, calculation tools are not often used in other areas, such as in Kinematics. It is necessary to carry out laboratory activities that provide significant awareness in the growth of these skills. The description of motion here will be elaborated in real contexts, using results such as the Theorem of Zeros, which has a continuity character, and the Lagrange, Rolle and Cauchy Theorems, which have a differentiability character. The definite integral will also be considered, from the kinematic point of view.*

Keywords: *Motion, Kinematics, Calculus.*

1 -Introduzione

È noto comunemente a docenti e allievi che il calcolo differenziale e integrale insegnato in scuole secondarie di secondo grado tende a focalizzarsi sull'elaborazione del concetto di funzione e su questioni prettamente numeriche. In effetti, si affrontano diverse proprietà collegate alla continuità e derivabilità di ampie classi di funzioni, dalle polinomiali alle esponenziali, dalle logaritmiche alle trascendenti, ecc., per esaminarne le loro caratteristiche e peculiarità, onde tracciarne il grafico e valutarne l'andamento. Del calcolo differenziale e integrale, sebbene vengano fornite alcune applicazioni in cinematica, questa, così come la meccanica, non riesce ad avvalersi concretamente degli stessi e utili strumenti concettuali. Questo lavoro intende orientarsi in questa direzione, illustrando una serie di esperienze didattiche, realizzate con gli allievi del Liceo Scientifico "Francesco Severi" di Salerno e non solamente relative alle classi terminali. Esso è stato presentato ad Agerola 2024 al IV Convegno *"Matematica Natura e Scienza dell'Alta Costiera Amalfitana-Itinerari interdisciplinari sui sentieri della matematica"*.

Nella realizzazione di queste attività laboratoriali i nuclei centrali della didattica sono stati concentrati su fondamentali risultati dell'*Analisi*, come il Teorema degli Zeri, che riveste un carattere di continuità, i Teoremi di Lagrange, Rolle e Cauchy, che hanno un carattere di differenziabilità e sul significato del calcolo di un integrale definito, per il quale il teorema fondamentale può offrire una giustificazione cinematica.

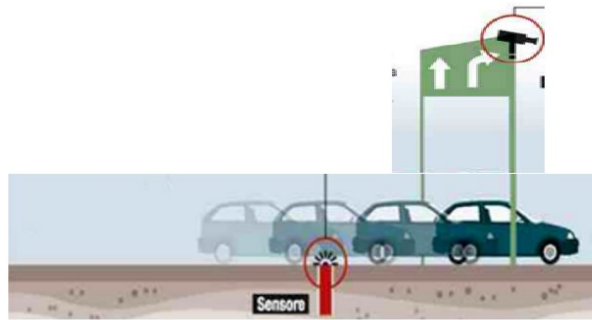
L'obiettivo è di rafforzare una maggiore consapevolezza nella sorprendente e sempre viva interazione esistente tra Matematica e Fisica. Si riscopre allora che la stessa esplorazione del moto, caposaldo storico nello sviluppo della scienza, non cessa di svelare il suo fascino fecondo.

2 – La matematica in autostrada e il teorema di Lagrange

Tra i primi concetti della cinematica ad essere discusso e trattato c'è quello della velocità. Lungi dall'essere una grandezza ovvia, in tutti i suoi aspetti, è nella fase del biennio della scuola secondaria di secondo grado che appare prevalentemente, sebbene possa essere stata incontrata negli studi precedenti.

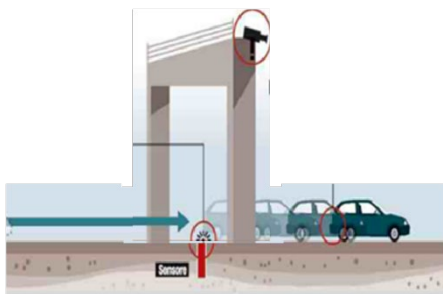
Non si tratteranno i relativi collegamenti con gli aspetti storici, seppur interessanti, legati ad alcune figure notevoli quali Aristotele, Buridano, Tartaglia e soprattutto Galilei che ne definisce il significato attuale. In queste fasi introduttive, gli allievi sono soliti manifestare la loro curiosità ed interesse su tale grandezza ed anche sulla distinzione che si opera tra i due casi: velocità media e istantanea. Quest'ultima è infatti definita intuitivamente, come operazione di passaggio al limite, con intervalli di tempo sempre più piccoli, in simboli $\Delta t \rightarrow 0$.

Descriviamo, in questa sede, un'interessante applicazione cinematica che ricorre spesso nella vita quotidiana e utilizza un importante risultato dell'Analisi Matematica. In diversi tratti di autostrada nazionale si osservano facilmente impianti che coinvolgono i sistemi tutor. Per esempio, in figura, si nota



uno di questi Sistemi che rivela il tempo in cui transita un'auto.

Supponiamo che l'auto al passaggio della barriera, dotata di sensori, abbia una velocità istantanea di 100 km/h . Successivamente, un altro sistema tutor rivela il secondo transito dell'auto, che supponiamo essere ancora di 100 km/h .



Considerando che il limite massimo è di 130 km/h , possiamo essere sicuri di non essere stati multati?

La richiesta è comprendere se esiste un momento in cui la velocità istantanea coincide con la velocità media. Se la funzione è derivabile, il Teorema di Lagrange ci assicura che esiste sempre un tale istante, non necessariamente unico.

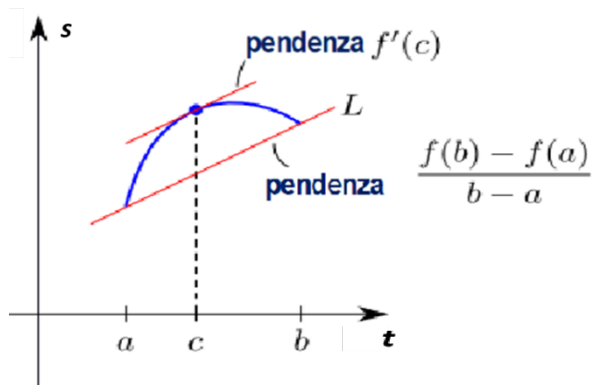
Nel nostro esempio immaginiamo che il tratto tra le barriere abbia una lunghezza di 24 km e che venga percorso in

10 minuti, cioè $(1/6)h$.

Nel nostro esempio immaginiamo che il tratto tra le barriere abbia una lunghezza di 24 km e che venga percorso in 10 minuti, cioè $(1/6)h$. Si avrebbe:

$$v_m = \frac{24 \text{ km}}{\left(\frac{1}{6}\right)h} = 144 \text{ km/h}$$

In figura viene indicata la legge oraria $\text{conf}(t)$, mentre $b-a = (1/6)h$ e $f(b)-f(a) = 24\text{km}$. L'istante c è il fatidico momento in cui siamo sicuri che scatta la multa, $v_i(c) = v_m$.



Sebbene il teorema costituisca un importante ponte tra i concetti di velocità media ed istantanea, non abbiamo nessun modo di determinare dove sia stata commessa l'infrazione, a meno che non si disponga di numerosi autovelox lungo la carreggiata di riferimento.

3 – Passeggiate e incontri inevitabili

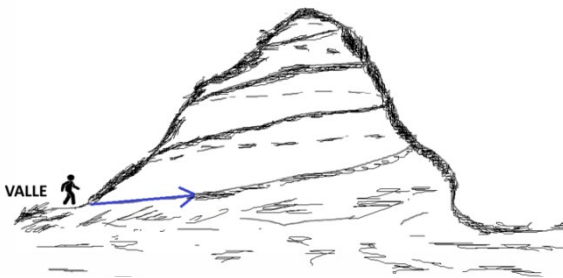
Il seguente quesito è tratto da (Gardner, 1979, p. 215) e viene qui liberamente adattato.

Martin Gardner è stato il più importante e prolifico scrittore di matematica ricreativa di ogni epoca. Nato nel 1914 in Oklahoma, dal 1956 al 1981 ha curato, per il mensile «*Scientific American*», una rubrica di enigmi e giochi matematici, divenuta popolare in tutto il mondo. In Italia è riproposta su «*Le Scienze*».

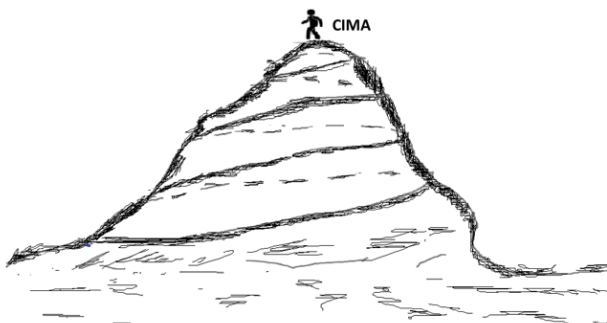
La passeggiata del turista

Un turista effettua un'escursione montana percorrendo un unico sentiero. Procede partendo a valle, alle ore 7:00 e giungendo in cima alle ore 19:00. Dopo aver riposato durante la notte, riparte il giorno seguente alle ore 7:00 dalla cima, percorrendo lo stesso sentiero e terminando a valle il suo tragitto alle ore 19:00. Nei due giorni, sosta diverse volte a piacimento, e con durata variabile. Ci si chiede se nei due giorni esiste un punto del sentiero in cui il turista è passato nello stesso istante?

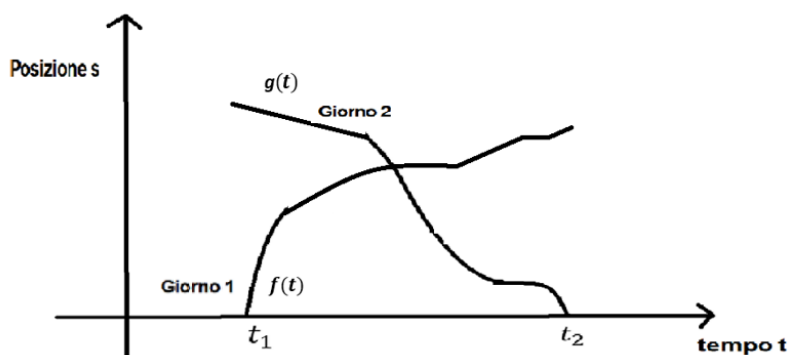
Il percorso del primo giorno



Il percorso del secondo giorno



Il moto unidimensionale del turista è descritto con un naturale sistema di riferimento, con origine O nel punto di valle, e con ascissa curvilinea s che indica la posizione del turista in funzione del tempo t . Si ipotizza la continuità della grandezza tempo, che è comunemente accettata. Si possono evidentemente rappresentare i relativi diagrammi orari dei due giorni, come in figura.



Sull'asse verticale sono indicate le posizioni e su quello orizzontale le misure dei tempi, mentre gli istanti di tempo di partenza e arrivo sono t_1 e t_2 , coincidenti nei due giorni. Si

assumono che le due leggi orarie del turista $f(t)$ e $g(t)$, siano funzioni continue. La soluzione è ottenuta allora come punto d'intersezione tra i due grafici; utilizzando il teorema degli zeri risulta che:

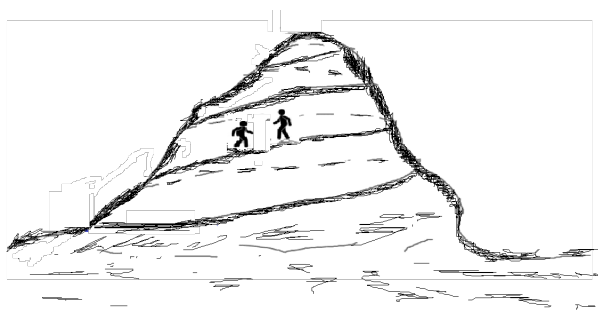
$$f(t_1) - g(t_1) < 0 ; f(t_2) - g(t_2) > 0$$

ed esisterà certamente un istante t in cui:

$$f(t) - g(t) = 0.$$

Una diversa soluzione tanto inaspettata quanto brillante è la seguente: si immagini un unico giorno ideale ed un turista con il suo gemello, che procedono simultaneamente sullo stesso sentiero. Uno è posto a valle e l'altro si trova in cima e si muovono in versi opposti. Evidentemente durante il percorso non potranno che incontrarsi ed in tale punto risponderanno, in maniera naturale, alla richiesta del quesito.





Secondo Gardner, tale soluzione deriverebbe dalla scuola psicologica Gestalt e dal suo carattere creativo. La Gestalt è una corrente psicologica che si sviluppò in Germania, dall'inizio del '900. Studiò principalmente la percezione delle forme e l'esperienza; tra i tanti esempi il triangolo di Kanizsa, l'illusione di Ponzo, il Vaso e i due profili ecc. K. Wertheimer (1945) descrisse il pensiero come da ritenersi creativo e produttivo in quanto, posto di fronte a una situazione problematica, può trovare soluzioni attraverso un processo di ristrutturazione e riorganizzazione globale della situazione stessa, di tutti i suoi elementi e dei loro significati funzionali e relazioni reciproche, detto "ricentrimento". Studi e sviluppi sul ruolo delle immagini mentali e sulle strategie metacognitive nella risoluzione dei problemi, in ambito matematico, risultano d'interesse e sempre attuali. Si veda per esempio George Polya (1970) su questo e su come avvenga la scoperta in matematica. Si segnalano anche i lavori di (Paolillo, 2022; Polekhin, 2015).

È rilevante che la soluzione data dalla Gestalt non presuppone la conoscenza del teorema degli zeri. Se si conduce un monitoraggio delle risposte degli allievi, con le inevitabili difficoltà che si riscontrano, si evince che essi tentano di localizzare effettivamente la posizione del punto

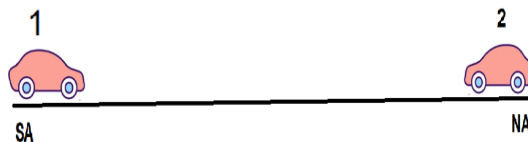
d'incontro. Sono orientati ad affermare che probabilmente si trova nel punto medio del sentiero. Qualcuno tra gli allievi ha anche proposto di realizzare un filmato video per il percorso d'andata e uno per quello di ritorno, con un confronto a posteriori dei fotogrammi del percorso. Si tende a trascurare, per diversi motivi, la richiesta iniziale che è prettamente esistenziale e non deterministica. Infatti, ci si chiede di capire se tale punto esiste e non dove sia collocato fisicamente.

3.1 – Incontrarsi con le auto e salutarsi

La situazione appare più chiara se la si espone in maniera quasi equivalente. Si provi a fornire ad un secondo gruppo di allievi, in maniera indipendente da quello precedente, la seguente richiesta:

Incontro tra auto

Due auto procedono in versi opposti sul tratto Salerno-Napoli (A3). Un'auto parte da Salerno e l'altra da Napoli, muovendosi con velocità qualsiasi ma con orari coincidenti per la partenza e l'arrivo delle due auto. Ci sarà un punto comune in cui gli autisti, procedendo nelle due carreggiate, riusciranno a salutarsi?

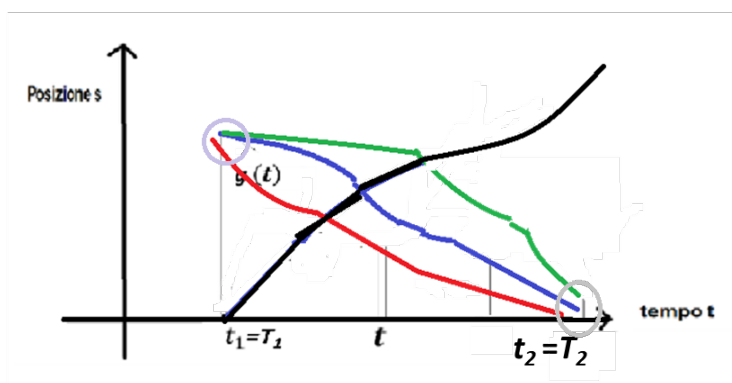


Assumiamo che il "punto comune" si possa idealmente identificare con la linea di collegamento perpendicolare tra le

due auto, quando si incontrano. Si possono anche considerare per le auto delle soste presso distributori o autogrill.

In questa variante, la risposta è resa più semplice, contestualizzandola in una situazione familiare, cioè nell'incontro di due automobili su un'autostrada. La difficoltà di individuare un "giorno ideale" in cui avanzano i punti mobili, che siano turisti o auto, è infatti sparita. Ciò sta ad attestare l'importanza di elaborare, tanto nella ricerca quanto nella didattica, dei possibili modelli di risoluzione esemplificativi ed efficaci.

Se si suppone di fissare costantemente il tragitto della prima auto e di far viaggiare più auto nel verso opposto alla prima, (per esempio un'auto verde, blu e rossa su corsie parallele) i punti ed i tempi in cui si incontreranno risulteranno differenti. Ciò a riprova ulteriore della validità del teorema degli zeri e della sua reinterpretazione cinematica.



La questione dell'incontro tra le due auto si può ancora estendere. Rispetto ad un orologio comune, detti t_e e t_f i tempi in cui l'auto 1 parte da A ed arriva in B e T_i e T_f i tempi in cui l'auto 2 parte da B ed arriva in A, perché ci sia un effettivo

incontro in un istante t' deve risultare (con esclusione dei punti terminali):

$$t_i < t' < t_f \quad \text{e} \quad T_i < t' < T_f, \quad \text{da cui segue } t_i < T_f \quad \text{e} \quad T_i < t_f$$

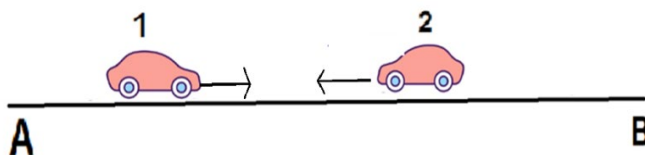
Nota.

Le formulazioni dei due quesiti precedenti si possono esprimere in maniera equivalente affermando che si sta ricercando l'esistenza di un istante di tempo, in cui le auto o i turisti, si incontrano in uno stesso punto.

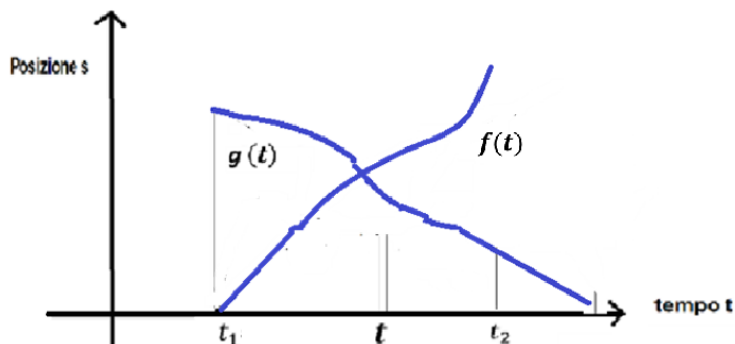
3.2 – Il secondo quesito sulla passeggiata di Gardner

Ciò che Gardner non si è chiesto è se dati due mobili, come in precedenza, può valere la coincidenza delle lancette dei tachimetri, almeno in qualche istante comune. In modo più esplicito si vorrebbe rispondere alla seguente richiesta:

Due auto procedono in versi opposti su un tratto rettilineo dalla città A alla città B. Partono e arrivano entrambe contemporaneamente. Esiste un istante di tempo in cui le auto avranno in modulo lo stesso valore della velocità?



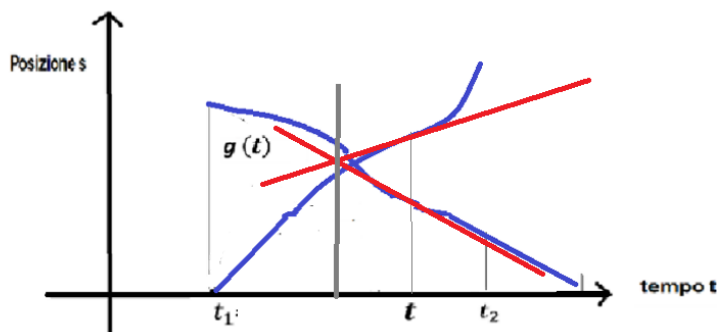
Si può fissare, al solito, il sistema di riferimento nella città A, con semiasse positivo verso B, ottenendo i seguenti diagrammi orari:



Si ammette anche che le funzioni posizione f, g delle auto siano continue e derivabili. In termini geometrici, significa che si sta richiedendo l'esistenza di un istante t , tale che le rette tangenti (di colore rosso) alle due curve nei punti di ascissa t , siano simmetriche rispetto all'asse verticale che passa per il loro punto d'intersezione.

Utilizziamo il Teorema di Rolle per rispondere al secondo quesito di Gardner. Si consideri la somma tra le due funzioni posizione $f(t) + g(t)$. Evidentemente vale:

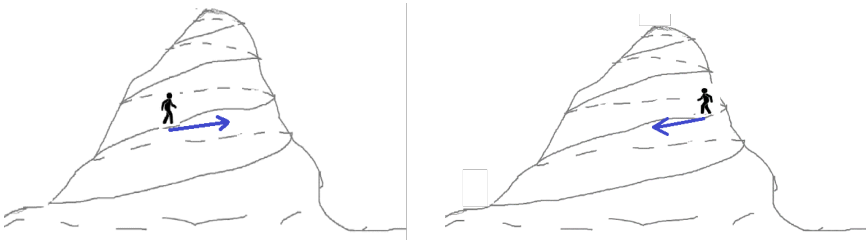
$$f(t_2) + g(t_2) = L + 0 = L ; f(t_1) + g(t_1) = 0 + L = L.$$



La funzione somma è anch'essa continua e derivabile ed essendo verificate le condizioni espresse dal teorema esisterà un istante t tale che: $f'(t) + g'(t) = 0$, da cui:

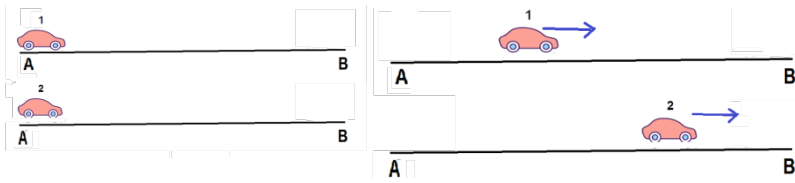
$$f'(t) = -g'(t)$$

Per questo istante t le due auto assumeranno, in modulo, la stessa velocità. Se si vuole effettuare un'analisi analoga per la passeggiata del turista, bisogna ipotizzare preliminarmente che non esistano punti spigolosi. Infatti, essendoci un percorso curvilineo, si deve ammettere che in ogni punto del percorso si possa tracciare la retta tangente e cioè che il vettore velocità sia determinato. La richiesta è comprendere, se esiste un istante, nei due giorni, in cui il turista misura in modulo la stessa velocità. La prova che ciò esista è basata sulla dimostrazione appena esaminata.



4 - Gare olimpioniche esaminate col calcolo

Percorsi paralleli e velocità comuni Due auto procedono nello stesso verso posizione f, g delle due auto siano entrambe continue e derivabili).



Si osserva come per ciascuna legge oraria il teorema di Lagrange non riesce a rispondere. Dal calcolo in basso, gli istanti t^* , t^{**} che verificano il teorema potrebbero essere diversi tra loro, essendo le funzioni f , g in genere diverse:

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}=f'(t^*) ; \frac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}=g'(t^{**})$$

Su tale ultima questione, la gara dei 100m piani delle Olimpiadi 2024, ha offerto una situazione vicina al nostro contesto. Lo statunitense N. Lyles e il giamaicano K. Thompson hanno terminato la gara con il tempo di 9,79 s, per la precisione Lyles ha realizzato 9,784 s e Thompson 9,789 s. Per i nostri scopi possiamo ipotizzare coincidenti i due tempi di arrivo e pervenire ad alcune considerazioni.

Uniformando le misure delle grandezze con il noto S.I., e quindi con velocità espresse in $\left(\frac{m}{s}\right)$, si otterrà:

$$\frac{f(9,79) - f(0)}{9,79 - 0} = \frac{100}{9,79} = 10,21$$



Esisterà allora un istante t^* in cui la velocità del vincitore è $f'(t^*) = 10,21$.

Così per il secondo classificato varrà lo stesso rapporto:

$$\frac{g(9,79) - g(0)}{9,79 - 0} = \frac{100}{9,79} = 10,21$$

ed esisterà un valore t^{**} con $g'(t^{**}) = 10,21$.

In generale tali istanti non sono coincidenti, potrebbero essere differenti pur verificandosi per gli atleti una comune velocità media di 10,21. Applicando opportunamente il teorema di Rolle si perviene ad ottenere un valore di t , con stessa velocità istantanea per entrambi i corridori e tale velocità istantanea non coinciderà generalmente con quella di 10,21.

Consideriamo allora la differenza tra le funzioni posizione f, g relativi ai primi due atleti:

$$f(t) - g(t)$$

Evidentemente vale:

$$f(t_2) - g(t_2) = 0 \text{ e } f(t_1) - g(t_1) = 0$$

Le funzioni f, g sono entrambe continue e derivabili e così lo è la relativa differenza che rispetta le ipotesi del Teorema di Rolle. Esisterà allora un istante t tale che:

$$f'(t) - g'(t) = 0,$$

da cui la tesi, cioè i due velocisti avranno in t lo stesso modulo della velocità istantanea.

4.1 -La risoluzione secondo il teorema di Cauchy

Si può rispondere al quesito olimpionico precedente applicando il classico teorema di Cauchy del Calcolo Differenziale. Si nota preliminarmente che i velocisti non assumono velocità nulla durante il tragitto, cioè che le ipotesi di detto teorema sono verificate. Si ha:

$$f(t_2) - f(0) = L - 0 = L$$

$$g(t_2) - g(0) = L - 0 = L$$

$$\frac{f(t_2) - f(0)}{g(t_2) - g(0)} = \frac{L}{L} = 1$$

da cui:

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} = 1$$

cioè $f'(t) = g'(t)$. Esisterà allora un valore t per il quale le due velocità istantanee saranno coincidenti in modulo.

4.2 – Correndo per le siepi



Due maratonete corrono la gara dei 300 m siepi. Partono allo Start ($t_1=0$ s), da ferme e dopo un po' di giri, a distanza L , cadono entrambe inavvertitamente, restando ferme all'istante (t_2). Si chiede se avranno avuto, fino ad allora, in qualche istante, una velocità comune? Analogamente se avranno avuto un'accelerazione comune?

Ammettendo che le leggi orarie f, g siano continue e derivabili, assieme alle derivate f', g' si verifica facilmente che:

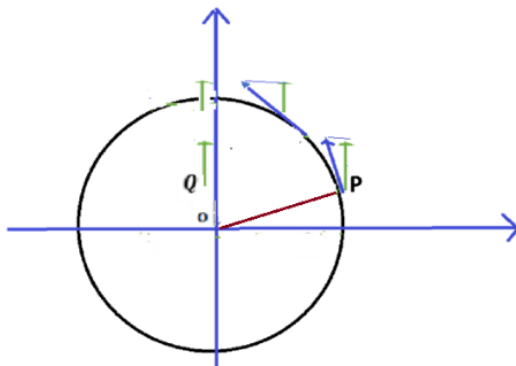
$$f(t_1) = g(t_1) = 0; \quad f(t_2) = g(t_2) = L;$$

$$f'(t_i) = g'(t_i) = 0; i=1,2;$$

Applicando il Teorema di Rolle come in precedenza per le funzioni differenza $f(t) - g(t)$ e $f'(t) - g'(t)$ si perviene affermativamente alle tesi. In generale si avranno due istanti t' e t'' non coincidenti tra loro.

5 - Calcolare un integrale con la cinematica

Si consideri il moto circolare uniforme ed il corrispondente moto armonico che si ottiene dalla naturale proiezione del punto P sull'asse verticale. In questa situazione, si può stabilire un risultato di un certo interesse, che coinvolge il calcolo di un integrale definito.



Si considerino per semplicità i seguenti valori unitari delle grandezze in gioco, raggio $R = 1\text{m}$, velocità angolare $\omega = 1\text{ rad/s}$, velocità lineare $v = \omega R = 1\text{ m/s}$, con partenza nell'usuale origine degli archi.

Nel disegno i punti P e Q si spostano insieme, sulla circonferenza e sul diametro, (in senso antiorario e verso l'alto) nel tempo che vada 0 s a $(\pi/2)\text{ s}$.

In questo intervallo temporale P percorrerà l'arco di lunghezza $\pi/2$ e Q un segmento con lunghezza pari a 1.

Poiché $\cos t\, dt$ si può intendere come il piccolo spostamento ds , lungo il raggio verticale, il calcolo dell'integrale definito visto come somma di tanti segmenti ds , diventa immediato.

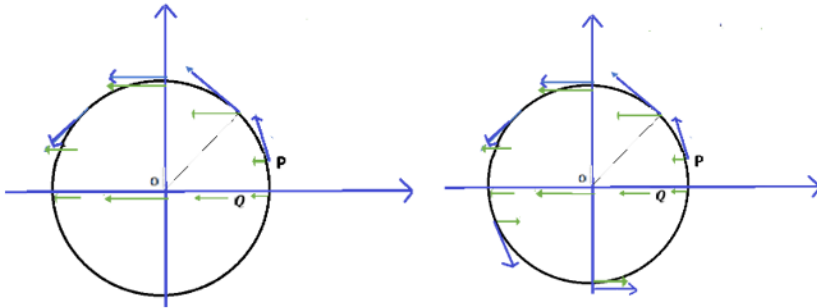
$$\int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = 1$$

Tale determinazione scaturisce da un fatto allora prettamente cinematico. Applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale, si otterrebbe lo stesso valore: $\sin(\pi/2) - \sin(0) = 1$.

Analogamente, si possono considerare integrali definiti come:

$$\int_0^{\pi} \sin t = 2;$$

$$\int_0^{3\pi/2} \sin t = 1$$



risolti per via cinematica. Tuttavia, non si deve intendere questo metodo da utilizzare in maniera universale, potendosi limitare solamente a questi esempi o a qualche nota funzione composta. A titolo di esempio, si consideri il moto circolare uniformemente accelerato con legge oraria $\alpha(t) = (1/2) t^2$ che avviene su una circonferenza di raggio unitario. Il relativo moto armonico che ne deriva sull'asse orizzontale, presenterà una velocità pari $av_x = v \sin \alpha(t)$ e di conseguenza $\int_0^m v_x dt = 1$, dove m viene determinata opportunamente come tempo di calcolo. Sviluppando, si otterrà per via cinematica, il seguente

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} t \sin\left(\frac{1}{2}t^2\right) = \left[-\cos\left(\frac{1}{2}t^2\right)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Ci si è riferiti alla rotazione di in quarto di giro, da cui è risultato $\alpha(m) = (1/2)m^2 = \pi/2$, con conseguente valore $m = \sqrt{\pi}$.

4 - Conclusioni

Il seguente lavoro ha l'auspicio di aver offerto una serie di attività laboratoriali da proporre proficuamente in un Liceo Scientifico o in istituti di scuola secondaria di secondo grado. I teoremi esaminati del Calcolo differenziale, come Rolle, Lagrange e Cauchy sono significativi da vari punti di vista, sia perché offrono condizioni sufficienti affinché si verifichino e sia perché sono di carattere esistenziale. Pongono quindi l'accento sulla natura stessa del contesto matematico, fatto spesso di implicazioni logiche in un solo verso e aiutano a far maturare nell'allievo l'importante distinzione concettuale tra l'esistenza di una soluzione e la sua effettiva determinazione. Tali attività didattiche, possono consentire una lettura più attenta del mondo reale, oltre a fornire utili strumenti nell'accrescimento dei livelli di competenza. Il presente articolo è stato ispirato da diverse fonti in letteratura. Oltre ad alcuni testi già citati in precedenza, come (Gardner, 1979), e per la scuola *Gestalt* (Anatriello, Vincenzi, 2016; Zudini, 2014), si menziona il classico e sempre attuale testo (Courant, Robbins, 2000) che ha fornito, per il teorema degli zeri, diversi sviluppi non usuali. In esso è discusso anche il problema meccanico di Whitney, abbastanza noto in letteratura, che ha ricevuto ampia discussione, del quale soltanto di recente sembra si sia trovata una soluzione adeguata, (Polekhin, 2015).

La risoluzione cinematica degli integrali, invece, si può evidenziare in vari autori, tra cui (Kuczmarski, 2011). Un ottimo testo in cui si illustra il ruolo degli esperimenti concettuali della fisica a supporto della matematica è (Levi, 2009). Si veda per questo anche (Paolillo, 2022; Polekhin, 2015).

Bibliografia

ANATRIELLO G., VINCENZI G. (2016). "Sono le basi cognitive della matematica geometriche?" In: «*Periodico di Matematiche*», Vol. 8 serie 12 n.3, p.41.

COURANT R., ROBBINS H. (2000). *Che cos'è la matematica?* Riedizione a cura di Ian Stewart. Torino: Bollati Boringhieri.

GARDNER Martin (1979). *Enigmi e giochi matematici*, vol 3, Firenze: Sansoni.

KUCZMARSKI F. (2011). "Roads and Wheels, Roulettes and Pedals". In: «*The American Mathematical Monthly*», 118(6), 479–496.

LEVI M. (2009). *The Mathematical Mechanic: using physical reasoning to solve problems*. Princeton: Univ. Press.

PAOLILLO B. (2007). "La mosca di Zenone". In: «*Lettera Matematica Pristem*» 61 pp. 60-64.

PAOLILLO B. (2022). "Gli esperimenti fisici come strumenti per l'indagine matematica". In: «*Periodico di Matematica*» (IV) Vol. IV (4) dicembre 2022, pp. 65-84.

POLEKHIN I. (2015). "An inverted pendulum with a moving pivot point: examples of topological approach". arXiv:1407.4787v4.

POLYA George (1970). *La scoperta matematica*. Voll. I e II. Milano : Feltrinelli.

WERTHEIMER Max (1945). *Productive thinking* . New York: Harper & brothers.

ZUDINI V. (2014). "La teoria della Gestalt. Figure, temi di interesse e prospettive per la didattica". In: «*Quaderni CIRD*» n. 9 pp. 34-52.