Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (3) dicembre 2025, pp. 77-100

Aritmetica e probabilità

Umberto Bartocci * Rocco Vittorio Macrì **

* bube231@yahoo.it
** rvm2000@gmail.com

DOI : 10.53159/PdM(IV).v7n3.163

Sunto: *Si discute il concetto di probabilità in termini di insiemi finiti, e si propongono alcune applicazioni didattiche del concetto in ambito puramente aritmetico.*

Parole Chiave*: Aritmetica, Probabilità, Numeri primi.*

Abstract: *We discuss probability in terms of finite stes, and its possible educational applications in the field of pure arithmetics.*

Keywords: *Arithmetics, Probability, Prime numbers.*

1 - Considerazioni epistemologiche

Nel periodo della cosiddetta "crisi dei fondamenti" della matematica[1], Bertrand Russell si divertiva a dar sfoggio del suo ... nichilismo epistemologico (peraltro un *morbus mathematicorum recens* all'epoca alquanto diffuso, secondo una felice

[1] Per il quale si sceglie convenzionalmente il 1902 come data d'inizio, ma la cui origine profonda deve essere vista secondo noi nella crescente influenza del darwinismo negli ultimi decenni del secolo XIX.

espressione di Gottlob Frege[2]), con affermazioni rimaste famose quali:

> *Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true*[3].

Ad essa qualche anno più tardi accompagnò una seconda più specifica battuta relativa a un settore "moderno" della matematica, ossia il Calcolo delle probabilità:

> *Probability is the most important concept in modern science, especially as nobody has the slightest notion what it means*[4].

Accennato rapidamente al fatto che la prima affermazione può essere facilmente ignorata da chiunque condivida le riflessioni di Immanuel Kant sull'argomento, secondo cui le due colonne portanti della matematica, l'aritmetica e la geometria, sono emanazione diretta delle due "intuizioni trascendentali" di tempo e spazio[5], rispettivamente, intendiamo qui occuparci

---

[2] "Logik in der Mathematik", in *Logik, Görres-Gesellschaft zur Pflege der Wissenschaft*, 1914; Imre Toth, «La philosophie mathématique de Frege. Restauration philosophique et contre-révolution scientifique», in *Liberté et vérité. Pensée mathématique et spéculation philosophique*, Paris–Tel Aviv, Éditions de l'éclat, 2009.

[3] "Mathematics and the Metaphysicians", in *Mysticism and Logic and Other Essays*, 1910, 1917.

[4] Da una lezione tenuta alla Beacon Hill School nel 1929, scuola fondata dallo stesso Russell e dalla moglie Dora nel 1927.

[5] «Tempo e spazio sono pertanto due fonti del conoscere, dalle quali possono essere attinte a priori varie conoscenze sintetiche, come segnatamente ce ne dà uno splendido esempio la matematica pura, rispetto alla cono-

brevemente della seconda, della quale si può invece dire che ... è un po' giusta e un po' sbagliata, ossia, ha un qualche fondamento ma rischia di indurre in confusione su un concetto che dovrebbe essere viceversa chiarissimo.

Russell avrebbe certo ragione se volesse far notare che il concetto di probabilità viene spesso utilizzato per dare apparente sostanza "scientifica" (quantitativa) ad espressioni che sono invece puramente linguistiche (che non vuol dire però prive di significato), nelle quali i "numeri" possono benissimo essere sostituiti con avverbi di quantità, probabile, molto probabile, poco probabile. Anche nella giurisprudenza[6] è invalsa l'abitudine di parlare di logica e probabilità un po' fuori contesto («il concetto di probabilità è fondamentale per la valutazione del nesso causale tra un fatto e un evento, soprattutto in ambiti come il diritto penale e civile»), si potrebbe quasi dire come espediente retorico. Ovvero, una quantificazione il cui effetto è unicamente quello di definire una semplice relazione di preordine tra le diverse possibili modalità di un evento, e a farlo con i numeri è forse più bello, e più "scientifico". Infine, a proposito di quella che potrebbe riconoscersi come una sorta di "infatuazione probabilistica", val forse la pena di ricordare anche il titolo del seguente libro, la cui "modernità" pretende appunto di introdurre la probabilità perfino nel campo della teologia, senza dimenticare nemmeno un riferimento a certe

---

scenza dello spazio e dei suoi rapporti. Essi cioè sono, tutte e due, forme pure di tutte le intuizioni sensibili; e così rendono possibili proposizioni sintetiche a priori», *Critica della ragion pura* - Estetica trascendentale, § 7.

[6] Su tale questione in generale si veda per esempio: Gaetano Carcaterra, "Ragionare per esclusione nel diritto riflessioni su un tema di Bobbio", i-lex Scienze Giuridiche, Scienze Cognitive e Intelligenza Artificiale, Rivista quadrimestrale on-line: www.i-lex.itm Marzo 2007, numero 7.

famose rivoluzioni concettuali nel campo della Fisica: *Teologia del probabile. La realizzazione cristiana dal limite alla relatività*[7].

Viene da chiedersi infatti come si facesse prima che il termine probabilità si affermasse, tenuto conto che sembra esso fosse addirittura assente almeno dalle nostre parti in tempi antichi[8], e che la sua introduzione risalga soltanto al periodo "moderno", soprattutto a favore di una famiglia speciale di giocatori (di carte o di dadi), come spiegherebbe qualsiasi testo attuale di Storia della probabilità.

Ciò premesso, aumentano la confusione i diversi approcci teorici alla probabilità, tra l'altro spesso non si comprende nemmeno probabilità "di che cosa"[9]. Approccio frequentista (o quantitativo), «che si basa su calcoli statistici e frequenze di eventi passati» (e se l'evento fosse uno solo, o solo ipotetico?), approccio logico (o baconiano), approccio soggettivista, approccio assiomatico, etc.. Per non dire del fatto che lungo il cammino si è perso anche il senso preciso di alcuni termini quali "stocastico"[10], che rimanda alla "congettura", al "lancio", al "bersaglio", come nell'etimo originale greco, piuttosto che al "casuale", o "aleatorio". In latino, *alea* è appunto il dado, e non

[7] Di Adriana Zarri (1919-2010), Gabrielli Editori, Verona 2025.

[8] Francesca Piazza, Salvatore Di Piazza, Verità verosimili. L'eikos nel pensiero greco, Mimesis, Milano, 2012. Lecito comunque dubitare della circostanza che certe naturali contrapposizioni concettuali, quali raro vs comune, verosimile vs inverosimile, possibile vs impossibile, etc., non siano presenti in ogni linguaggio che sia un minimo "evoluto".

[9] Ci asteniamo volutamente dal commentare il termine "evento", poiché ci appare ... misterioso, sia nel presente contesto che in quello della Teoria della relatività (ristretta).

[10] Jakob Bernoulli, *Ars Conjectandi*, opera pubblicata postuma nel 1713, otto anni dopo la morte dell'autore.

ci sembra che elaborare una congettura, con la ricerca preliminare di tutta l'evidenza disponibile che essa richiede, equivalga al lancio di un dado, bensì ad un altro genere di lancio, che presuppone di aver ben preso la mira. Ovvero, sulla questione pesa pure, secondo noi, l'inevitabile connessione ludica che la materia presenta in virtù delle note origini storiche dianzi richiamate[11], la "Teoria dei giochi" nel senso letterale del termine non rientrando in quella che è la concezione classica della Matematica (diremmo, può interessare poco).

La circostanza su cui si fonda quindi la parte accettabile della critica di Russell alla probabilità è che di essa si parla spesso come se la sua assegnazione fosse "oggettiva", ed abbia quindi senso chiedere: "quale è LA probabilità etc.", anche in situazioni dove tale assegnazione è invece almeno in parte "soggettiva", e non è possibile allora usare il termine probabilità con l'articolo determinativo singolare. Insomma, se, di fronte ad un dato crimine commesso con certezza da una persona X, la quale è stata in stretta connessione, familiare o di lavoro o altro, con un secondo soggetto Y, ci si chiedesse quale sia la probabilità che Y sapesse o non sapesse dell'attività criminosa di X, è ovvio che ci troveremmo di fronte ad una probabilità che non si sa realmente cosa sia, e come si possa determinare con una qualche esattezza (e la questione potrebbe essere complicata sostituendo al verbo sapere il verbo sospettare). Se

[11] La famosa lettera di Pascal a Fermat è del 1654, ma era stata preceduta diversi anni prima dal breve saggio *Sopra le scoperte dei dadi* di Galilei (rimasto in forma manoscritta, fu redatto a Firenze tra il 1613 e il 1623), mentre al 1663 risale la pubblicazione del *De Ludo Aleae* di Gerolamo Cardano. Riflessioni matematiche sul gioco dei dadi si trovano anche nella *Summa* del Pacioli, 1494.

lo facessimo, si tratterebbe soltanto di un'espressione di convinzioni personali non quantificabili. Ciò nondimeno, se invece si scrivessero su 10 bigliettini i numeri da 1 a 10, e poi si sorteggiasse uno di codesti bigliettini, le probabilità che esca un numero pari o un numero dispari, oppure un numero primo, etc., sarebbero tutti valori univocamente determinabili in maniera assolutamente razionale e oggettiva, sicché il "soggettivista" che non fosse d'accordo con tali determinazioni si collocherebbe irrimediabilmente sul versante dell'irrazionalità.

In conclusione, ferma restando la validità di alcune osservazioni dei soggettivisti[12], e la circostanza quindi che l'attribuzione da parte di un soggetto di un valore di probabilità (sottinteso, in un dato istante t a "qualcosa" per cui l'espressione abbia qualche senso) dipende essenzialmente dallo "stato dell'informazione" del soggetto in quell'istante t, è pur vero invece che le radici del concetto di probabilità in Matematica vanno ritrovate in maniera del tutto precisa nella elementare Teoria degli insiemi diciamo pure finiti, una teoria che in fondo non è altro che l'antica logica aristotelica un po' rivisitata e formalizzata[13]. Quasi a definire implicitamente il campo della "logica elementare" come tutto ciò di cui si possa parlare (o pensare) attraverso i concetti di insieme e funzione (corrispondenza, morfismo), vale a dire, il linguaggio della affasci-

[12] Quali per esempio Bruno de Finetti, "Fondamenti logici del ragionamento probabilistico", *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, I930, n. 5, pp. 1-3.

[13] Insomma, altro che "insiemistificazione" della matematica, come amava dire il matematico de Finetti menzionato nella Nota precedente, si tratta unicamente di una sorta di formalizzazione della logica (con l'uso di ... stenografia!), la quale non può non precedere ogni ragionamento di tipo matematico, ma non solo.

nante Teoria delle categorie[14]. Prima ci si renderà conto di codesta circostanza, e ci si abituerà a familiarizzare con essa, meglio sarà, a qualsiasi età, a partire ovviamente dall'avvento di quella della "ragione".

2 - La "logica" della probabilità

Si è ormai compreso che, secondo noi, almeno l'inizio del Calcolo delle probabilità non può non essere collocato che nella definizione di una ben precisa corrispondenza

p_U: P(U) $\rightarrow$ N_0 (l'insieme dei numeri naturali più lo 0),

dove U è un qualsiasi insieme finito non vuoto (una sorta di "universo"), e dove $p_U(X)$ è definito, per qualsiasi sottoinsieme X di U, come il rapporto $|X|/n$, cioè un numero razionale positivo o nullo rappresentato da una frazione il cui numeratore è il numero degli elementi di X, ed il denominatore $n = |U|$ è il numero degli elementi di U. Va da sé, tale definizione è sostanzialmente la stessa che Laplace dette nel 1812 nell'"Introduction" della sua *Théorie analytique des Probabilités*, peccato però riconducendola ancora alla teoria dei giochi, *des hasards*, ed introducendo il famoso giro vizioso dell'equiprobabilità per definire la probabilità: «*La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de*

[14] Vedi per esempio Saunders Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag , New Yotk Heidelberg Berlin,1971.

ce nombre à celui de tous les cas possibles est la mesure de cette probabilité, qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles».

Il valore $p_U(X)$ può invero intendersi come la probabilità che un elemento di U si trovi in X, e da qui è facile poi definire per esempio una probabilità condizionata $p(X|Y)$ semplicemente mediante:

$$p(X|Y) = |X \cap Y| / |Y| = p_Y(X \cap Y)$$

(ovviamente, $p_U(X)=p(X|U)$), ed in seguito dimostrare le usuali proprietà di una funzione di probabilità, fino alla formula di Bayes, etc.. Vale a dire, quelle proprietà che, in un momento successivo, potrebbero essere proposte come "assiomi", punti di partenza, cioè per una definizione "formale", etc. etc.. Si può poi naturalmente procedere sulla stessa strada, accrescendo lo scenario con grafi ed alberi, strutture che rappresentano n-tomie probabilistiche, semplici concetti corrispondenti a partizioni, sottopartizioni, etc., tutto perfettamente chiaro e rigoroso, all'interno della categoria degli insiemi finiti[15].

Ci sembra di poter asserire che siamo così di fronte a una perfetta e facile costruzione matematica la quale ha più a che fare con una "logica della certezza", anziché con una "logica

[15] La Teoria della probabilità viene così ad essere concepita come una sorta di gigantesca *Ars Combinatoria*, o *Ars Magna*, secondo le corrette aspettative di coloro che ripresero la logica antica nell'età moderna, un lungo elenco da non dimenticare nel corso di lezioni di storia del pensiero.

dell'incertezza"[16], e che non merita dunque l'ironia squisitamente anglosassone del III Conte Russell.

Quindi tutto qui per quanto concerne l'analisi del concetto di probabilità? Ovviamente no, basta al riguardo consultare uno qualsiasi dei numerosi testi dedicati alla materia, o pensare alla generalizzazione della probabilità dal regno del discreto a quello del continuo, che si trova per esempio a fondamento della Meccanica Quantistica. Ma quanto dianzi accennato non può non esserne l'introduzione, il fondamento, alla quale affermazione aggiungiamo però che, pur rimanendo nell'ambito del finito, i problemi "pratici" con cui si ha subito a che fare rivestono notevole interesse in sé, sebbene di natura alquanto differente. Un valore $p_U(X)$, che si voglia utilizzare all'interno di considerazioni di qualsiasi altra natura, può infatti nella realtà essere di difficile determinazione, quando si abbia a che fare per esempio con un universo U abbastanza

[16] Riprendendo il tema astratto dei "bigliettini" numerati da 1 a 10, e ponendo per esempio l'attenzione sui numeri primi, in questo segmento iniziale di N (un concetto su cui torneremo in seguito) ce ne sono 4, quindi la probabilità che da un'estrazione esca un bigliettino primo è 4/10. Se codesta frazione misura l'incertezza del risultato dell'estrazione, incertezza ovviamente insuperabile, dove sta invece la certezza? Sta nel fatto che, se numeriamo per esempio 10 studenti da 1 a 10, e diciamo che proclameremo vincitori di qualche premio coloro il cui numero corrisponda in qualità al numero estratto, ossia primo o non primo, sappiamo per certo che ci saranno esattamente 4 vincitori e 6 sconfitti, o viceversa, aut aut, ovvero, tertium non datur. In conclusione di Nota, sottolineiamo però che, ovviamente, sostenere che il Calcolo delle probabilità sottende in definitiva ad edificare una "Teoria delle decisioni in condizioni di incertezza" non è certo insensato, così come riconoscere che esso può benissimo servire a sviluppare metodi per analizzare e calcolare i "rischi", ciò che è il fondamento del sistema delle assicurazioni.

"grande". Si cercherà allora di ridurre in proporzione U ed X, sperando in cotal modo di riuscire a valutare $p_U(X)$ con buona approssimazione, ovvero a partire da una serie di valori $p_{U'}(X')$, e questo è il compito della "teoria del campionamento" dell'Inferenza statistica (la Statistica è una disciplina contigua alla Probabilità, ma appunto diversa, decisamente diversa)[17].

Non vogliamo qui dire di più sulla costruzione dianzi accennata, che è in fondo una parte assai elementare della Teoria degli insiemi finiti e dell'Aritmetica (Calcolo combinatorio). Desideriamo piuttosto suggerire nella seconda parte dell'articolo come si possano presentare a dei giovani studenti molteplici e istruttivi ambiti di pensiero, grazie ai quali essi potranno cominciare a familiarizzare sia con concetti aritmetici sia con concetti probabilistici, ampliando così l'orizzonte delle conoscenze matematiche, e di conseguenza pure ... il numero delle connessioni neurali (chissà che questo argomento non possa convincere anche ragazzi meno sensibili al fascino di certe questioni che meditare su di esse può risultare in ogni caso vantaggioso).

[17] La differenza epistemologica fondamentale consiste nel fatto che la Statistica è per sua definizione una scienza del passato, mentre della Teoria della probabilità si dice che essa ha l'aspirazione di "prevedere il futuro" (non è naturalmente vero, ma ha qualche senso), e l'unico "ponte" logico possibile tra tali due ambiti dell'esperienza umana è l'ipotesi di natura tautologica: "Se il futuro sarà come il passato ...". Noi preferiremmo piuttosto rilevare che la Statistica ha a che fare con il "reale", mentre la Probabilità, almeno sotto l'aspetto che stiamo qui discutendo, ha a che fare con il puramente razionale.

3 - Probabilità aritmetiche

«Il linguaggio del calcolo delle probabilità è pieno di esempi e applicazioni a giochi usuali quali i dadi, le carte, il lotto, e questo deriva certamente da motivazioni storiche: Pascal, Fermat, Galileo, Bernoulli, furono alcuni grandi matematici che fondarono il calcolo delle probabilità stimolati da quesiti posti dai risultati e dalle aspettative del gioco d'azzardo», è questo l'*incipit* di un testo reperibile in rete[18] sul Calcolo delle probabilità che conferma quanto sopra illustrato. Come annunciato però nella prima parte del presente scritto, intendiamo superare codesta impostazione "ludica", facendo adesso vedere invece che ci si può tranquillamente familiarizzare con proprietà probabilistiche rimanendo nel campo tradizionale dell'aritmetica. Vale a dire che d'ora in avanti il nostro "universo" sarà l'insieme dei numeri naturali N, la cui infinitezza nulla toglierà alle desiderate applicazioni, poiché all'interno di esso evidenzieremo di volta in volta dei particolari sottoinsiemi finiti sui quali opereremo, a cominciare dagli intervalli (o segmenti) iniziali di N:

$S(n) = [1,n] = \{1, 2,..., n\}$,

oppure intervalli non iniziali:

$S(k,n) = [k,n] = \{k,k+1, k+2,..., n\}$ $(1<k\leq n)$[19].

Abbiamo già accennato al "gioco"[20] dei bigliettini con i numeri da 1 a 10, e al calcolo dei numeri pari o dispari presenti

[18] https://digilander.libero.it/zinabianca/probabilita.htm

[19] Mettere in evidenza subito che S(n,k) contiene n-k+1 elementi e non n-k è doveroso, basta fare un test su un qualsiasi campione di popolazione per rendersene conto!

[20] Tanto per ... autocontraddirci subito, ma c'è gioco e gioco, e qui non stiamo parlando di ... giochi d'azzardo! Aggiungiamo poi che si tratta solo

appunto in S(10), oppure in S(11), tante possibili scelte che cambiano, sebbene nei detti casi di poco, le valutazioni di "probabilità" di cui stiamo parlando. Ma si può porre l'attenzione su altre interessanti classi di numeri, per esempio i numeri primi e, volendo distinguere tra questi i numeri primi diversi dal 2 e dal 3 (numeri primi evidentemente "speciali"), far "scoprire" agli studenti che l'insieme dei numeri primi che restano, diciamolo PO (primi "ordinari"; gli elementi di PO sono tutti ovviamente dispari), si può suddividere (bipartire) in due famiglie disgiunte: quella degli elementi di PO che divisi per 6 danno resto 1, e l'altra contenente quegli elementi di PO che divisi per 6 danno invece resto -1 (o se si preferisce 5). Vale a dire, si scopre una bipartizione naturale:

PO = PO(-)∪PO(+), dove i numeri primi di PO(-) potrebbero denominarsi "anteprimi", numeri che si trovano cioè prima di un multiplo di 6, e "postprimi" gli altri, gli elementi di PO(+), quelli cioè che si trovano dopo un multiplo di 6.

Ecco un modo forse interessante e non "noioso" di introdurre argomenti del tipo la divisione euclidea con resto, per eccesso o per difetto, il concetto generale di congruenza con le relative proprietà, etc., per tornare poi sul versante probabilità con il proporre domande del tipo: quale probabilità abbiamo in S(10,20) di trovare un anteprimo, o un postprimo?, così man mano "scoprendo" che anteprimi e postprimi sono più o meno presenti nello stesso numero in codesti intervalli, ma con qualche fluttuazione non facile da prevedere *ab initio*.

---

di "giochi mentali", un po' come i famosi Gedankenexperiment di Albert Einstein.

Potremmo poi volendo introdurre la questione della "distanza" tra due numeri primi, e parlare così del cosiddetto postulato di Bertrand, della sorprendente congettura di Goldbach che lo implica, della congettura dei numeri primi gemelli, delle generalizzazioni di Polignac, e calcolare per esempio le probabilità di trovare primi o primi gemelli o primi a distanza 4, etc., in dati intervalli.

È ormai chiaro che cosa intendiamo, e non vogliamo insisterci troppo, gli esempi da utilizzare sono evidentemente numerosissimi (multipli, progressioni aritmetiche o geometriche, quadrati, etc.), anzi ... infiniti. Ci preme piuttosto accennare al fatto che, con studenti più grandini, per esempio quelli di una classe liceale, ci si potrebbe spingere fino a far intuire questioni di comportamento asintotico, e ad introdurre concetti che consentano di andare in direzione di definizioni più complesse, quali per esempio quella di densità di Schnirelmann di un sottoinsieme infinito di N. Si scoprirebbe così, per fare qualche esempio, che i numeri pari sono quanti intuitivamente essi appaiono, ossia la "metà" di tutti i numeri naturali, allo stesso modo che i numeri dispari sono la metà di tutti i numeri naturali, inoltre che i numeri pari sono "tanti quanti" i numeri dispari, entrambi gli insiemi però "più grandi" dell'insieme dei numeri primi, etc. etc.. In tale ambito di idee, dopo alcune constatazioni di natura che potremmo dire sperimentale sulla distribuzione dei numeri primi (e ci si potrebbe nell'occasione anche avviare all'uso di un calcolatore), si potrebbero introdurre la relativa funzione enumerativa $\pi(n)$ (la cosiddetta *Prime Counting Function*), e l'associata funzione di probabilità $\pi(n)/n$, indi enunciare il famoso Teorema dei numeri primi (PNT, *Prime Number Theorem*), che di questa fun-

zione di probabilità descrive il comportamento asintotico, confrontandola con la funzione 1/log(n).[21]

Facile a questo punto che tali naturali "comparazioni" di sottoinsiemi infiniti di numeri naturali possano invogliare ad un excursus sull'aritmetica transfinita cardinale di Cantor, e sui cosiddetti "paradossi dell'infinito", ovvero quelli concernenti la "quantità" del tutto e della parte. Un discorso che prenda ovviamente le mosse dal ragionamento di Galileo sui numeri quadrati[22], i quali, sebbene siano progressivamente sempre di meno di tutti i numeri - e questo è comunque un "fatto" matematico da tenere in debito conto - pur tuttavia sotto un altro punto di vista possono riconoscersi essere "tanti quanti" tutti i numeri naturali, etc..

4 - Numeri primi e "numeri di Sofia"

Vogliamo presentare infine un'altra interessante classe di numeri naturali, che, oltre a poter essere utilizzati nelle precedenti comparazioni di natura probabilistica, mostrano anche particolari connessioni con i numeri primi, connessioni per lo più ancora oscure, ma sicuramente notevoli.

[21] Qui log designa il logaritmo neperiano. 1/log(n) è una funzione (o, se si preferisce, una successione) che è evidentemente infinitesima al divergere di n, ed essendo tale che il relativo rapporto (π(n)/n)/(1/log(n)) ha limite uguale ad 1, appunto secondo lo splendido teorema PNT dianzi menzionato, ecco provato che pure la probabilità π(n)/n è infinitesima al divergere di n, e che quella reciproca di funzione logaritmica la approssima convenientemente.

[22] Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Prima giornata, 1638.

Diciamo Σ il sottoinsieme di N costituito da tutti quei numeri, che chiameremo "numeri di Sofia"23, i quali possono essere scritti in base decimale come una stringa contenente soltanto le cifre 1 e 7. Se poi indichiamo con Σ(n), per ogni numero naturale n, il sottoinsieme di Σ di tutti quei numeri di Sofia che hanno lunghezza n, è chiaro che otteniamo una "bella" partizione di Σ in infiniti sottoinsiemi finiti: $\Sigma = \cup\Sigma(n)$.

Insomma, con ovvio significato dei simboli (per esempio il simbolo $\oplus$, improvvisato per l'occasione):

$\Sigma(1) = \{1, 7\}$

$\Sigma(2) = 1 \oplus \Sigma(1) \cup 7 \oplus \Sigma(1) = \{11, 17\} \cup \{71, 77\} = \{11, 17, 71, 77\}$

...

$\Sigma(n) = 1 \oplus \Sigma(n\text{-}1) \cup 7 \oplus \Sigma(n\text{-}1) =$ {1111...1, 1...17, 1...171, ... , 7777...7}[24].

Dopo aver sottolineato che il precedente ordinamento coincide con quello naturale indotto da N, osserviamo esplicitamente che tra i numeri di Sofia ci sono quei particolari numeri con tutte le cifre uguali ad 1, che sono stati chiamati *repunit* (*repeated unit*) nel bel libro di Albert Beiler *Recreations in the Theory of Numbers* (1964)[25]. Osserviamo inoltre, dato il nostro

[23] Codesta denominazione viene scelta in onore dell'ultima nipotina del più anziano degli autori. Tali numeri sono già stati oggetto di attenzione in un articolo dei medesimi autori intitolato "Numeri primi e numeri di Sofia", che è stato pubblicato in Rudi Mathematici, N. 321, 2025:

https://www.rudimathematici.com/archivio/archiviodb.php.

[24] Volendo, si potranno mettere i numeri di Sofia di lunghezza maggiore o uguale di 2 in relazione con i vari "prodotti formali" non commutativi (1+7)(1+7)=11+17+71+77,

(1+7)(11+17+71+77)=111+117+171+177+711+717+771+777, etc..

[25] In questo libro non c'è però, né ci risulta sia presente altrove, un qualche accenno ai numeri di Sofia in generale

interesse per i numeri primi, che le repunit possono essere talvolta dei numeri primi, come nei casi $\Sigma(2)$ oppure $\Sigma(19)$ o ancora $\Sigma(23)$[26].

Gli insiemi $\Sigma(n)$ sono ricchi di struttura, né potrebbe essere altrimenti, visto che ogni dato $\Sigma(n)$ rappresenta sostanzialmente l'insieme delle parti di un insieme finito con n elementi: per rendersene conto, basta interpretare un numero di Sofia come una funzione caratteristica, dove la cifra 7 prende il posto dello 0, con il vantaggio però che il 7 può essere la cifra iniziale di un numero naturale, mentre lo 0 no[27]. Detto in maniera più "tecnica", esiste un isomorfismo naturale tra $\Sigma(n)$ e $P(S(n))$, l'insieme delle parti del segmento iniziale $S(n)$ di N, dove l'unica *repunit* di $\Sigma(n)$ corrisponde all'intero $S(n)$, il numero 777...7 all'insieme vuoto, etc.. Tra l'altro, da ciò si ottiene subito il numero cardinale di $\Sigma(n)$, $|\Sigma(n)| = 2^n$. Si aggiunga adesso che in $P(S(n))$, $n \geq 2$, ci sono ovviamente gli n sottoinsiemi con un solo elemento, che si chiamano i *singleton* di $S(n)$, i quali sono tanti quanti i loro complementari, ossia i sottoinsiemi con (n-1) elementi, etc.. I numeri di Sofia corrispondenti a codesti sottoinsiemi, numeri che hanno quindi tutte le cifre

[26] Non si sa ancora oggi per quali lunghezze si ottengano codesti speciali numeri primi, si sa soltanto che tali eventuali lunghezze debbono a loro volta essere numeri primi (un facile teorema), come dire che la precedente comparsa dei numeri 2, 19, 23 non è un caso fortuito. Aggiungiamo che si ottengono *repunit* prime anche per le lunghezze 317, 1031, e poi un grande salto fino a 49081. Insomma, sempre più **rare**, le successive corrispondenti alle lunghezze 86453 e 109297, ed infine addirittura 270343, l'ultima tale lunghezza fino ad oggi nota, a quel che ci risulta.

[27] Della scelta del 7, giustificata dalla sua relazione con il 6, e di questo speciale numero con i numeri primi, avremo presto modo di comprendere l'utilità.

uguali ad 1 ed una sola uguale a 7, potranno chiamarsi *quasi-repunit* (o *near-repunit*), ecco qui le prime di esse: 17, 71, 117, 171, 711, 1117, ... Da tale connessione insiemistica consegue che $\Sigma(n)$ ammette un automorfismo involutorio $\delta : \Sigma(n) \to \Sigma(n)$ corrispondente alla complementazione, che possiamo chiamare "dualità", per esempio $\delta(117) = 771$ (i duali delle *quasi-repunit* corrispondono ai *singleton* di $P(S(n))$), ed un'ulteriore interessante analoga corrispondenza *reverse* ρ, per esempio $\rho(1117) = 7111$, con la conseguenza che alcuni numeri di Sofia si potranno dire palindromi, come 1771, quelli cioè che coincidono con il loro reverse.[28]

Già da queste prime considerazioni si comprende come con i numeri di Sofia si possa "giocare" in due modi differenti, qualche volta interagenti tra di loro, ovvero come semplici stringhe, o come numeri naturali corrispondenti a quelle stringhe. Proseguendo nella descrizione dei $\Sigma(n)$ sotto l'aspetto stringhe, introduciamo presto delle interessanti operazioni "somma" tra di essi, somme però non commutative, del tipo $\oplus : \Sigma(n) \times \Sigma(k) \to \Sigma(k+n)$ (utilizzando qui un simbolo di ovvia interpretazione già introdotto in altro comunque analogo contesto), che sono definite semplicemente "attaccando" un numero di Sofia ad un altro, esempio $117 \oplus 71 = 11771$. Introdotte adesso le due equibipartizioni naturali che ogni $\Sigma(n)$ possiede, $\Sigma(n) = {}_1\Sigma(n) \cup {}_7\Sigma(n)$, e $\Sigma(n) = \Sigma(n)_1 \cup \Sigma(n)_7$, con evidente riferimento dei nuovi simboli a quei numeri di Sofia che cominciano per 1 o per 7, o che finiscono per 1 o per 7, è evidente il loro

[28] Essendo ovvio che nessun numero di Sofia può coincidere con il proprio duale, val la pena osservare che possono invece coincidere il duale ed il *reverse* di un dato numero di Sofia, come per esempio nei casi di 17 e 71, o 1717 e 7171, etc..

collegamento con l'operazione somma dianzi definita. Se n≥2, tutto ciò consente di definire 4 monomorfismi di estensione, da $\Sigma(n-1)$ a $\Sigma(n)$, ai quali si accompagneranno 2 naturali epimorfismi di restrizione. Sarebbe semplice verificare quali relazioni hanno tra loro queste 6 corrispondenze, quali sono inverse, destre o sinistre, di altre, e come sono collegate all'operazione somma $\oplus$ (introdotte le proiezioni di un prodotto cartesiano sui suoi fattori), operazione sulla quale presto torneremo. Insomma, tutta una varietà di concetti che possono contribuire a far familiarizzare gli studenti con la teoria degli insiemi, ed essere facile sorgente di nuove curiose domande, le cui risposte si ottengono grazie all'effettuazione di calcoli abbastanza facili che bisogna imparare a fare se si vuol progredire in un cammino di apprendimento matematico. Per esempio, quanti sono i numeri di Sofia di lunghezza n palindromi? In altre parole, qual è la probabilità che un numero di Sofia di lunghezza n sia palindromo? etc. etc..

Diventa adesso ancora più interessante passare dai numeri di Sofia come stringhe ai numeri di Sofia come numeri naturali. La prima loro proprietà da "scoprire" è che tutti gli elementi di un dato $\Sigma(n)$ hanno lo stesso resto modulo 6, ossia sono tutti congruenti mod 6. Un resto che dipende naturalmente da n secondo il seguente semplice schema ricorrente:

$\Sigma(1) \equiv 1$, $\Sigma(2) \equiv -1$, $\Sigma(3) \equiv 3$,

$\Sigma(4) \equiv 1$, $\Sigma(5) \equiv -1$, $\Sigma(6) \equiv 3$, ...

In altre parole, suddiviso l'insieme di tutti i numeri naturali dispari (e i numeri di Sofia sono tutti dispari), nelle tre progressioni aritmetiche:

P(1): 1, 1+6=7, 7+6=13, 13+6=19, ...

P(2): 3, 3+6=9, 9+6=15, 15+6=21, ...

P(3): 5, 5+6=11, 11+6=17, 17+6=23, ...

si arriva a scoprire che P(1) contiene $\Sigma(1)\cup\Sigma(4)\cup\Sigma(7)\cup...$, allo stesso modo che P(2) contiene $\Sigma(3)\cup\Sigma(6)\cup\Sigma(9)\cup...$, e P(3) contiene $\Sigma(2)\cup\Sigma(5)\cup\Sigma(8)\cup...$. La connessione con il numero 6 farà tornare alla mente le dianzi descritte due famiglie dei numeri anteprimi e postprimi, e si sarà così facilmente stabilito che eventuali numeri di Sofia primi, ossia gli elementi dell'insieme $\Sigma\cap PO = (\Sigma\cap PO(-))\cup(\Sigma\cap PO(+))$, non possono avere lunghezza che sia un multiplo di 3, e che quindi essi andrebbero ricercati soltanto in $\Sigma\cap PO(-) = \Sigma(2)\cup\Sigma(5)\cup\Sigma(8)\cup...$ (anteprimi), oppure in

$\Sigma\cap PO(+) = \Sigma(1)\cup\Sigma(4)\cup\Sigma(7)\cup...$ (postprimi).

Tutto ciò illustrato, si potrebbe tornare sull'aspetto "probabilistico" (computazionale) della situazione, ovvero porsi delle domande del tipo:

- quanti numeri di Sofia ci sono per esempio nell'intervallo S(10)=[1,10], o in quello S(10,100)=[10,100]?

- la probabilità di trovare un numero di Sofia nell'intervallo [10,100] è maggiore, minore, o uguale, di quella di trovare un numero primo nel medesimo intervallo? (numero primo che sia in PO oppure no)

- in un dato $\Sigma(n)$ (n non multiplo di 3), quanti numeri primi ci sono? E quanti primi gemelli? (si noti che il gemello di un eventuale primo di Sofia non può essere esso stesso un numero di Sofia, e che se il numero primo gemello di Sofia è un anteprimo, allora il suo gemello si trova aggiungendo 2, mentre se è un postprimo si trova sottraendo 2).

- E quanti primi di Sofia che siano tali insieme al loro duale, oppure al loro reverse? Quanti primi di Sofia palindromi?

Etc. etc., tante "divertenti" domandine che conducono a tante diverse valutazioni di probabilità.

Un altro *divertissement*[29] probabilistico che possiamo fare con i numeri di Sofia è collegato al naturale epimorfismo

$\alpha : \Sigma(n) \to [0,n]$ (il cui codominio è ancora un segmento iniziale, però di N_0, non di N) che associa ad ogni numero di Sofia s di lunghezza n il numero $\alpha(s)$ delle sue cifre uguali a 1 (il numero $n-\alpha(s)$ sarà invece evidentemente il numero delle sue cifre uguali a 7). Va notato subito che la funzione α è additiva rispetto alla somma $\oplus$ dianzi definita, $\alpha(s' \oplus s'') = \alpha(s') + \alpha(s'')$. Per le *repunit* sarà allora $\alpha(s)=n$, per le *quasi-repunit* $\alpha(s)=n-1$, ed in generale otterremo una (n+1)-partizione $\Sigma(n) = \Sigma_0(n) \cup \Sigma_1(n) \cup ...$, con manifesto significato dei simboli. Notato che detta partizione corrisponde ovviamente a quella di P(S(n)) rispetto alla relazione di equivalenza tra sottoinsiemi definita dall'equipotenza, per ogni numero intero k da 0 a n, le cardinalità dei vari insiemi $\Sigma_k(n)$ saranno determinate dai coefficienti binomiali $C(n,k) = |\Sigma_k(n)|$, protagonisti dell'identità aritmetica:

$2^n = C(n,0)+C(n,1)+...+C(n,n)$. Si potranno allora per esempio tra i numeri di Sofia di lunghezza 3 scegliere, in veste di "rappresentanti" rispetto alla relazione di equivalenza indotta da α, i numeri: 111, 117, 177, 777, che potremmo chiamare numeri di Sofia "ridotti", con il vantaggio di essere passati da un in-

[29] Il termine non è stato scelto a caso, bensì volutamente, in contrapposizione al concetto di "scuola dell'obbligo". Al contrario, se una scuola rivolta a persone molto giovani non è una "scuola del piacere", dell'interessamento, dell'approfondimento, ha già fallito in partenza il suo compito. Discorso diverso, naturalmente, per "scuole" professionali che vengono scelte in età più avanzata anche per altri tipi di "interesse".

sieme di cardinalità esponenziale 2^n ad un sottoinsieme di cardinalità $(n+1)$[30]. Tutto ciò conduce a nuove valutazioni di probabilità, tra le quali particolarmente interessante quella che darà risposta alla seguente domanda: estraendo a caso uno dei 2^n numeri di Sofia di lunghezza n, sarà più probabile ottenerne uno che abbia $\alpha(s)=0$, oppure $\alpha(s)=1$?, etc., così pervenendo alla naturale constatazione che sono maggiormente probabili i numeri di Sofia che hanno più o meno lo stesso numero di 1 e di 7, ossia $\alpha(s)\sim n/2$. Non sarà pertanto inutile in tale contesto far osservare che un singolo n-numero di Sofia può essere interpretato come il risultato di una sequenza di n consecutivi lanci di una moneta con esito testa o croce, per esempio "leggere" 1771=testa-croce-croce-testa, sicché tanti ulteriori pensieri interessanti e collegamenti potranno sorgere nella mente degli studenti. Per esempio, limitandoci ai numeri di Sofia di lunghezza pari n=2k, potremmo chiamare "perfetti" quei numeri s tali che $\alpha(s)=k$, e far notare non solo che ogni numero di Sofia del tipo $s \oplus \delta(s)$ è un numero di Sofia perfetto (di lunghezza 2n), ma pure che se si prende la somma $\oplus$ di tutti i numeri di Sofia di detta lunghezza n, si ottiene senz'altro un numero di Sofia perfetto di lunghezza $nx2^n$. *Idem* se si considerano soltanto i numeri di Sofia ridotti, ottenendo così un numero perfetto di lunghezza però assai minore, n(n+1). Possiamo domandarci adesso: quale probabilità c'è che un nume-

[30] I numeri di Sofia ridotti di lunghezza n sono chiaramente tanti quanti le decomposizioni ordinate additive di n. Può essere utile pure far notare che ogni numero di Sofia si ottiene da uno ridotto "permutando" le cifre 1 e 7, circostanza che potrebbe condurre a qualche considerazione sul concetto di azione di un gruppo su un insieme, nel presente caso naturalmente il gruppo delle permutazioni su n elementi

ro di Sofia di lunghezza 2k sia perfetto? E quale che sia ridotto? o che sia primo? (continuando in tal modo a "giocare" con la doppia interpretazione dei numeri di Sofia, quali semplici stringhe oppure numeri naturali veri e propri). E come cambiano tali probabilità se consideriamo soltanto numeri di Sofia in qualche speciale sottoinsieme notevole di essi? (quelli che cominciano per 1, o finiscono per 7, etc. etc.) Molteplici "curiosità" di cui talvolta non si potrà conoscere la risposta generale, ma in casi particolari sì.

Osserviamo infine che, attraverso tutte le accennate valutazioni di probabilità, ci si sarà resi conto che i numeri di Sofia sono relativamente "pochi" (in termini avanzati, densità di Schnirelmann uguale a 0), e che si potrebbe anche "scoprire" che essi sono addirittura molti **meno** dei numeri primi[31]. Eppure, tra di loro appaiono con notevole frequenza dei numeri primi, e talvolta perfino in proporzione **superiore** a quella che ci si aspetterebbe. Per non dire dei numeri primi gemelli, che si trovano alquanto spesso tra i numeri di Sofia[32], il che con-

[31] Un'affermazione questa seconda più difficile da dimostrare della prima, comunque un corollario del PNT dianzi richiamato, e quindi come tale non del tutto fuori portata, almeno in una classe liceale.

[32] Il più "lungo" che abbiamo finora trovato è una *quasi-repunit* gemella ... impresentabile, di lunghezza 2075, costituita da 411 cifre 1, poi un 7, ed infine ancora un 1 per altre 1663 volte, con notazione dappositamente inventata per l'occasione: [1x411][7][1x1663]. Più presentabile sarebbe stata un'analoga *quasi-repunit* di lunghezza 449: [1x269][7][1x179], ma ci piace mostrare qui un'altra *quasi-repunit* gemella di lunghezza 58, con il 7 al 48mo posto:

11111111111111111111111111111111111111111111111171111111111.

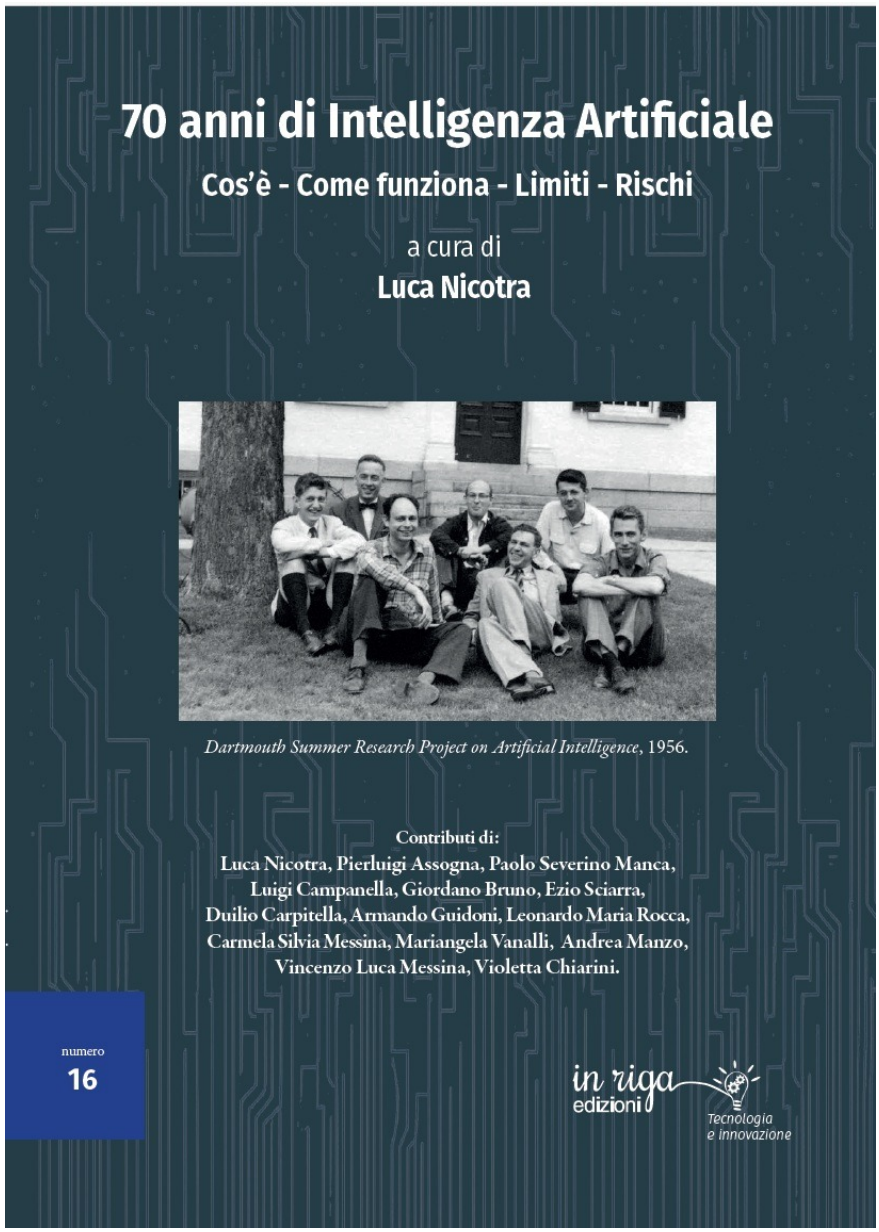
Ecco invece un numero di Sofia di lunghezza 28 perfetto che e' anche un primo gemello,: 1111111117177777717177717771. Abbiamo riportato volutamente tali numeri in questo modo allo scopo di far comprendere appieno

duce a varie "congetture" confortate dalle interessanti tabelle numeriche presenti in rete[33], che contemplano numeri naturali di lunghezza fino a 28, tavole facili da compilare nei primi casi, comunque di agevole lettura e comprensione in quelli successivi. Con esse chiudiamo le nostre argomentazioni, nella speranza che esse possano essere state trovate suggestive almeno da qualche lettore.

---

la terribilezza dell'infinito numerabile (figurarsi quella del continuo, infinito potenziale vs infinito attuale, si sarebbe detto in altri tempi), e la sua alienità dalla mente umana. Gli antichi parlarono di horror vacui per descrivere una Natura che aborre il vuoto, qui potremmo forse parlare di horror immensitatis, e quindi pronunciare le stesse parole della principessa Rezia di fronte all'indifferente maestosità dell'oceano (nella bella opera *Oberon* di Carl Maria von Weber): "*Ozean! Du ungeheuer*!".

[33] Umberto Bartocci - Alessandro Miotto, *Introducing Sofia Numbers and New Conjectures on Primes*, 2025, http://viXra.org/abs/2512.0089


70 anni di Intelligenza Artificiale
Cos'è - Come funziona - Limiti - Rischi
a cura di
Luca Nicotra
Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence, 1956.
Contributi di:
Luca Nicotra, Pierluigi Assogna, Paolo Severino Manca,
Luigi Campanella, Giordano Bruno, Ezio Sciarra,
Duilio Carpitella, Armando Guidoni, Leonardo Maria Rocca,
Carmela Silvia Messina, Mariangela Vanalli, Andrea Manzo,
Vincenzo Luca Messina, Violetta Chiarini.
numero
16
in riga edizioni
Tecnologia e innovazione