

Dalla distanza di un punto da una retta nello spazio al prodotto vettoriale

Un percorso didattico per introdurre le componenti cartesiane del prodotto vettoriale

Andrea Battocchio*

*Liceo Statale “Primo Levi” di San Donato Milanese;
andrea.battocchio@levi.edu.it



DOI : 10.53159/PdM(IV).v7n3.164

Sunto: *Il prodotto vettoriale è uno strumento fondamentale della matematica e della fisica, ma la sua introduzione didattica risulta spesso artificiale, ridotta a regole di calcolo basate sul determinante di una matrice. In questo contributo si propone un approccio alternativo per motivare la costruzione delle componenti cartesiane del prodotto vettoriale a partire da un problema concreto di geometria analitica. Dopo aver discusso i metodi classici di calcolo per la distanza di un punto da una retta nello spazio tridimensionale, si mostra come accostando ad essi il significato geometrico del prodotto vettoriale, le sue componenti e l'anticommutatività possano emergere in maniera naturale.*

Parole Chiave: *Geometria analitica dello spazio, prodotto vettoriale, componenti cartesiane, didattica della matematica*

Abstract: *The cross product is a fundamental tool in mathematics and physics, yet its didactic introduction often appears artificial, reduced to computational rules based on the determinant of a matrix. In this work, an alternative approach is proposed to motivate the construction of the Cartesian components of the crossproduct, starting from a concrete problem in analytical geometry. After discussing classical methods for calculating the distance from a point to a line in three-dimensional space, it is shown how, by relating these methods to the geometric meaning of the cross product, its components and anticommutativity can be naturally derived.*

Keywords: *Analytical geometry in three-dimensional space, cross product, Cartesian components, Mathematics education*

1 -Introduzione

Il prodotto vettoriale è uno strumento chiave per descrivere fenomeni geometrici e fisici nello spazio tridimensionale. Secondo le *Indicazioni Nazionali* per i licei scientifici, già nel biennio gli studenti dovrebbero affrontare in matematica “i concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio, nonché gli elementi del calcolo matriciale”;¹ inoltre, è richiesto di approfondire “la comprensione del ruolo fondamentale che i concetti dell’algebra vettoriale e matriciale hanno nella fisica”.

¹«Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all’articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all’articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento.» (2010).

Seguendo la definizione comunemente adottata il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un vettore $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ tale che

- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$, dove θ è l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$
 - $\vec{c}$ è ortogonale sia a $\vec{a}$ sia a $\vec{b}$
 - $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ formano una terna destrorsa
- (1)

In fisica, il concetto di prodotto vettoriale viene introdotto relativamente presto, ma nella pratica didattica si considera per lo più il suo modulo, come nel caso del momento di una forza: sia $\vec{F}$ una forza applicata su un punto P di un corpo imperniato in un punto fisso O, il momento della forza rispetto a O è

$$\vec{M} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F} \quad \text{con} \quad |\vec{M}| = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \theta$$

dove θ è l'angolo tra $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{F}$.

Con una simile definizione di momento (si vedano ad esempio Parodi et al. 2006; Amaldi 2007; Caforio e Ferilli 2012; Cutnell et al. 2023) è difficile rendere conto della direzione e del verso di $\vec{M}$ e a maggior ragione della non commutatività del prodotto vettoriale.

Se la direzione e il verso di $\vec{M}$ non sono essenziali per gli obiettivi del biennio, cioè verificare l'equilibrio di un corpo rispetto alla rotazione ed eventualmente determinare la sua velocità e accelerazione angolare,² essi diventano importanti in altre applicazioni come, ad esempio, la forza di Lorentz. In elettromagnetismo si fa quindi ampio uso della regola della mano destra per individuare la direzione e il verso del prodotto vettoriale. Tuttavia rimane difficile la rappresentazione corretta del vettore risultante, soprattutto se i due vettori coinvolti nel prodotto vettoriale non sono perpendicolari.

²Ivi, 342.

Nelle classi più avanzate il prodotto vettoriale è esplicitato anche nelle sue componenti facendo ricorso, per la loro memorizzazione, ad una formula basata sul calcolo del determinante della matrice composta dai versori del sistema cartesiano e dalle componenti dei due vettori (Martelli 2023): dati i vettori $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ e $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ il loro prodotto vettoriale si calcola come

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \quad (2)$$

$$(a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

Questa presentazione, pur efficace sul piano operativo, rischia di apparire agli studenti come un procedimento meccanico, scarsamente giustificato dal punto di vista geometrico.

In questo articolo si propone un percorso alternativo per motivare la costruzione delle componenti cartesiane del vettore risultante di un prodotto vettoriale.

Lo schema di lezione è pensato per una quarta liceo scientifico, classe dove si affronta la geometria analitica dello spazio,³ in maniera propedeutica all'utilizzo del prodotto vettoriale in elettromagnetismo. È infatti proprio da un problema geometrico concreto, quello di determinare la distanza di un punto da una retta nello spazio tridimensionale, che si può trarre lo spunto per mostrare come la sua soluzione conduca in modo naturale alla scrittura delle componenti del prodotto vettoriale.

³Ivi, 340

2 -Distanza punto-retta nello spazio

La distanza di un punto da una retta nello spazio tridimensionale è generalmente presentata nei libri di testo in forma di esercizio, ma non è mai ricavata una formula esplicita, come nel caso bidimensionale, partendo da condizioni generiche.

In due dimensioni, dato il punto $P(p, q)$ e la retta r di equazione $ax + by + c = 0$, la distanza di P da r si calcola con la formula

$$d(P, r) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

In tre dimensioni, dato un punto $P(p, q, r)$ e una retta r passante per il punto $A(a, b, c)$ con direzione $\vec{v} = (l, m, n)$, avente quindi equazione parametrica

$$r: \begin{cases} x = a + lt \\ y = b + mt \\ z = c + nt \end{cases}$$

la distanza di P da r può essere calcolata in diversi modi, di seguito alcuni esempi.

2.1 - Primo metodo

In un primo modo si trova il piano passante per P perpendicolare a r , si interseca il piano con la retta in modo da trovare il punto H , appartenente a r , che ha distanza minima da P e poi si calcola la distanza $\overline{PH}$ (Sasso e Zannone 2020, 581).

Il piano perpendicolare a r e passante per P ha equazione

$$l(x - p) + m(y - q) + n(z - r) = 0$$

intersecando il piano con r , l'equazione diventa

$$l(a + lt - p) + m(b + mt - q) + n(c + nt - r) = 0$$

e risolvendo in funzione di t si trova:

$$t = \frac{lp + mq + nr - al - bm - cn}{l^2 + m^2 + n^2} \quad (3)$$

da sostituire nella formula per il calcolo di $\overline{PH}$:

$$\overline{PH} = \sqrt{((a + lt) - p)^2 + ((b + mt) - q)^2 + ((c + nt) - r)^2} \quad (4)$$

2.2 - Secondo metodo

Un altro modo è considerare un punto generico H appartenente alla retta r , imporre che $\overline{PH}$ sia perpendicolare alla retta r e poi calcolare la distanza $\overline{PH}$ (Antoniali 2017).

Sia H un punto generico della retta r , avente quindi coordinate $(a + lt, b + mt, c + nt)$. Affinchè $\overline{PH}$ sia perpendicolare a r , il vettore

$$\overrightarrow{PH} = \begin{pmatrix} a + lt - p \\ b + mt - q \\ c + nt - r \end{pmatrix}$$

deve essere ortogonale a $\vec{v}$:

$$(a + lt - p) \cdot l + (b + mt - q) \cdot m + (c + nt - r) \cdot n = 0$$

e risolvendo in funzione di t si trova ancora la (3) da sostituire nella (4).

2.3 - Terzo metodo

Un terzo modo è considerare un generico punto H appartenente alla retta r , calcolare la distanza $\overline{PH}$ e imporre che sia quella di misura minima (Savo 2010, pt. 11).

La distanza $\overline{PH}$ è data dalla (4), sviluppando l'espressione sotto radice si ottiene un trinomio di secondo grado:

$$t^2(l^2 + m^2 + n^2) + 2t(al + bm + cn - lp - mq - nr) + (b - q)^2 + (a - p)^2 + (r - c)^2$$

che ha il suo valore minimo⁴ in corrispondenza del valore di t dato dalla (3).

2.4 - Formula analitica per la distanza punto-retta nello spazio

In tutti tre i modi si giunge al valore di t dato dalla (3) da sostituire nella (4). Svolgendo i relativi calcoli si ottiene una lunga espressione con trenta termini sotto radice che opportunamente raccolti si riducono a

⁴Per trovare il valore minimo si può osservare che il trinomio rappresenta una parabola con il coefficiente di secondo grado sempre positivo e quindi il valore minimo si trova in corrispondenza del vertice della parabola, oppure si può calcolare la derivata dell'espressione in funzione di t e porla uguale a zero.

$$\overline{PH} = \sqrt{\frac{(p-a)^2(m^2+n^2)+(q-b)^2(l^2+n^2)+(r-c)^2(l^2+m^2)+-2(lm(p-a)(q-b)+mn(q-b)(r-c)+ln(p-a)(r-c))}{l^2+m^2+n^2}} \quad (5)$$

Raccogliendo ulteriormente i termini quadratici si arriva ad una formula analitica compatta per la distanza del punto P dalla retta r nello spazio:

$$d(P, r) = \sqrt{\frac{(l(q-b)-m(p-a))^2+(m(r-c)-n(q-b))^2+(l(r-c)-n(p-a))^2}{l^2+m^2+n^2}} \quad (6)$$

Dalla lunghezza e dalla complessità mnemonica della (6) è abbastanza evidente il motivo per cui nei libri di testo non è mai ricavata esplicitamente nella sua forma generale, come l'omologa in due dimensioni. Il calcolo della distanza punto-retta nello spazio, infatti, viene quasi sempre proposto in forma di esercizio per casi particolari, da risolvere con uno dei metodi indicati.

2.5 -Prodotto vettoriale come area del parallelogramma

Attraverso un approccio più "sintetico", si perviene ad un'altra formula molto più semplice per il calcolo della distanza di un punto da una retta nello spazio che contiene un prodotto vettoriale (Martelli 2023, 288).

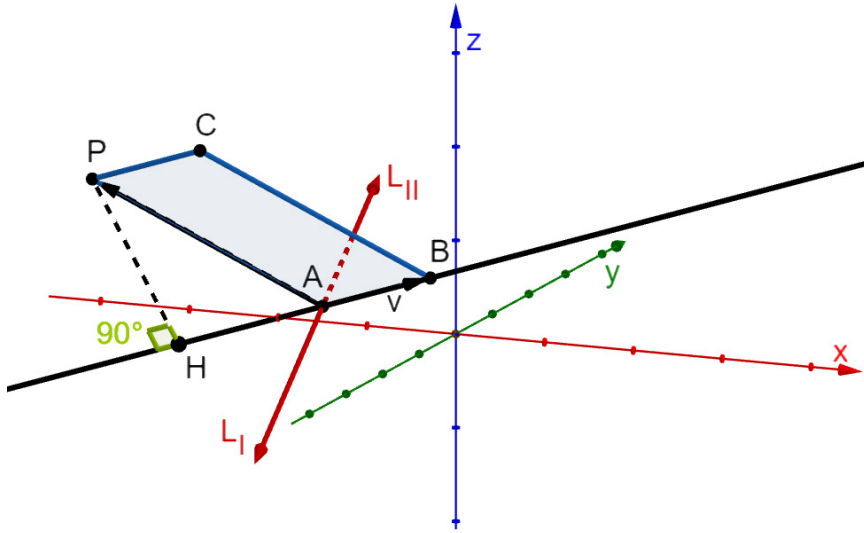


Fig. 1

In figura 1 la distanza $\overline{PH}$ è l'altezza del parallelogramma $PABC$, dove B è il punto di arrivo del vettore $\vec{v}$ applicato al punto A e C il quarto vertice.

L'area del parallelogramma è

$$Area_{PABC} = \overline{AB} \cdot \overline{PH} = \overline{AB} \cdot \overline{AP} \cdot \sin \widehat{PAB}$$

Ricordando dalla definizione (1) che

$$|\overline{AB} \times \overline{AP}| = \overline{AB} \cdot \overline{AP} \cdot \sin \widehat{PAB}$$

si trova che la distanza $\overline{PH}$ è

$$\overline{PH} = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AP}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\vec{v} \times \overline{AP}|}{|\vec{v}|} \quad (7)$$

3 -Le componenti del prodotto vettoriale

Se si confrontano le due espressioni della distanza $\overline{PH}$ (6) e (7), si osserva che hanno lo stesso denominatore, poichè $|\vec{v}| = \text{chè}|\vec{v}| = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$, e il numeratore della (6), in quanto somma di tre quadrati sotto il segno di radice quadrata, può essere interpretato come il modulo di un vettore, così come lo è il numeratore della (7). Uguagliando i risultati della (6) edella (7) si ha

$$|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{\frac{(l(q-b)-m(p-a))^2 + (m(r-c)-n(q-b))^2 + (l(r-c)-n(p-a))^2}{l^2 + m^2 + n^2}} \quad (8)$$

Chiamato $\vec{L}$ il vettore risultante del prodotto vettoriale di $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AP}$, è possibile risalire alle sue componenti cartesiane L_x , L_y e L_z . Queste infatti sono individuabili nelle espressioni elevate al quadrato sotto il segno di radice; pertanto possono essere:⁵

$$\begin{aligned} l(q-b) - m(p-a) & \quad \text{oppure} \quad m(p-a) - l(q-b) \\ m(r-c) - n(q-b) & \quad \text{oppure} \quad n(q-b) - m(r-c) \\ l(r-c) - n(p-a) & \quad \text{oppure} \quad n(p-a) - l(r-c) \end{aligned}$$

Le possibili combinazioni per assegnare una terna di queste espressioni al vettore $\vec{L}$ sono 48.⁶ Per scegliere l'espressione corretta corrispondente ad ogni componente cartesiana biso-

⁵La molteplicità delle possibili espressioni deriva dal fatto che, nel passaggio dalla (5) alla (6), il raccoglimento in quadrato di ciascun termine nella (6) può essere effettuato in due modi distinti, semplicemente invertendo il segno del binomio, senza modificare il risultato finale.

⁶ 48 deriva da $3! = 6$ disposizioni delle prime tre espressioni, ciascuna moltiplicata per $2^3 = 8$ varianti per le tre coppie di espressioni alternative.

gna tenere presente che $\vec{L}$, per la definizione (1) di prodotto vettoriale, deve essere ortogonale sia a $\vec{v}$ sia a $\overrightarrow{AP}$. La condizione di ortogonalità impone che la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti lungo x , y e z sia nullo.

Le uniche due terne compatibili sono:⁷

$$\begin{cases} L_{Ix} = m(r - c) - n(q - b) \\ L_{Iy} = n(p - a) - l(r - c) \\ L_{Iz} = l(q - b) - m(p - a) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} L_{IIx} = n(q - b) - m(r - c) \\ L_{IIy} = l(r - c) - n(p - a) \\ L_{IIz} = m(p - a) - l(q - b) \end{cases}$$

si può quindi affermare che i due vettori

$$\vec{L}_I = \begin{pmatrix} m(r - c) - n(q - b) \\ n(p - a) - l(r - c) \\ l(q - b) - m(p - a) \end{pmatrix} \text{ e } \vec{L}_{II} = \begin{pmatrix} n(q - b) - m(r - c) \\ l(r - c) - n(p - a) \\ m(p - a) - l(q - b) \end{pmatrix}$$

rappresentano entrambi il prodotto vettoriale di $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AP}$.

Come è facile verificare, $\vec{L}_I$ e $\vec{L}_{II}$, uguali in direzione e modulo per costruzione, differiscono tra loro solo per il segno:

⁷La verifica dell'ortogonalità tra tutte le 48 possibili terne di componenti è laboriosa ma semplice da eseguire, si può pensare di assegnare ad ogni studente della classe una o più specifiche combinazioni.

L'ortogonalità di $\vec{L}$ e $\vec{v} = (l, m, n)$ si esprime verificando che

$$\begin{aligned} (m(r - c) - n(q - b)) \cdot l + (n(p - a) - l(r - c)) \cdot m + (l(q - b) - m(p - a)) \cdot n = 0 \\ (n(q - b) - m(r - c)) \cdot l + (l(r - c) - n(p - a)) \cdot m \\ + (m(p - a) - l(q - b)) \cdot n = 0 \end{aligned}$$

mentre l'ortogonalità di $\vec{L}$ e $\overrightarrow{AP} = (p - a, q - b, r - c)$ verificando che

$$\begin{aligned} \bullet (m(r - c) - n(q - b)) \cdot (p - a) + (n(p - a) - l(r - c)) \cdot (q - b) + \\ (l(q - b) - m(p - a)) \cdot (r - c) = 0 \\ \bullet (n(q - b) - m(r - c)) \cdot (p - a) + (l(r - c) - n(p - a)) \cdot (q - b) + \\ (m(p - a) - l(q - b)) \cdot (r - c) = 0 \end{aligned}$$

$\vec{L}_I = -\vec{L}_{II}$, hanno quindi versi opposti lungo la medesima direzione.

L'attribuzione del verso a ciascuno dei due vettori è puramente convenzionale. Solitamente la scelta è fatta in coerenza con il sistema cartesiano di riferimento xyz adottato, che a sua volta è solitamente destrorso, cioè segue la regola della mano destra. Siano $\hat{i}$ e $\hat{j}$ i versori degli assi cartesiani x e y , se si posiziona l'indice della mano destra come $\hat{i}$ e il medio come $\hat{j}$, il verso del versore $\hat{k}$ dell'asse z corrisponde al pollice.

In questo sistema di riferimento, associando $\vec{v}$ all'indice della mano destra e $\vec{AP}$ al medio, il verso del loro prodotto vettoriale, individuato dal pollice, sarà opposto a quello che si ottiene associando all'indice $\vec{AP}$ e al medio $\vec{v}$. In altre parole il prodotto vettoriale non è commutativo ma dipende dall'ordine dei vettori e poiché i vettori risultanti differiscono solo per il segno, il prodotto vettoriale è anticommutativo:

$$\vec{v} \times \vec{AP} = -(\vec{AP} \times \vec{v})$$

L_I e L_{II} sono quindi rispettivamente $\vec{v} \times \vec{AP}$ e $\vec{AP} \times \vec{v}$.

Generalizzando il risultato ottenuto, siano $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ e $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ due vettori nello spazio tridimensionale, le componenti dei prodotti vettoriali $\vec{a} \times \vec{b}$ e $\vec{b} \times \vec{a}$ sono così determinate:

$$\begin{cases} (\vec{a} \times \vec{b})_x = a_y b_z - a_z b_y \\ (\vec{a} \times \vec{b})_y = a_z b_x - a_x b_z \\ (\vec{a} \times \vec{b})_z = a_x b_y - a_y b_x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (\vec{b} \times \vec{a})_x = b_y a_z - b_z a_y \\ (\vec{b} \times \vec{a})_y = b_z a_x - b_x a_z \\ (\vec{b} \times \vec{a})_z = b_x a_y - b_y a_x \end{cases}$$

Per ricordare più agevolmente lo sviluppo delle componenti cartesiane, si usa spesso la (2), che rappresenta comunque

solo un metodo operativo di memorizzazione, tramite il determinante della matrice formata nella prima riga dai tre versori del sistema cartesiano $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ e nelle altre due righe dalle componenti dei due vettori nell'ordine del prodotto:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{b} \times \vec{a} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}$$

4 - Conclusione

Il percorso proposto mostra come un problema concreto di geometria analitica, poco conosciuto agli studenti nella sua formulazione generale, come la determinazione della distanza di un punto da una retta nello spazio tridimensionale, possa costituire uno spunto naturale per introdurre il prodotto vettoriale e giustificare le componenti cartesiane. Questo approccio consente agli studenti di comprendere meglio il significato geometrico e fisico del prodotto vettoriale, evitando la percezione di una formula astratta e memorizzata meccanicamente.

La proposta didattica si inserisce inoltre coerentemente dal punto di vista temporale, perché si colloca tra la geometria analitica dello spazio, in programma al quarto anno, e le applicazioni fisiche del prodotto vettoriale, anch'esse in programma alla fine del quarto o all'inizio del quinto anno.

Bibliografia

AMALDI Ugo.(2007). *La Fisica di Amaldi. Vol. 1*,Bologna: Zanichelli.

ANTONIALI Fabio Maria. (2017). «Appunti di geometria analitica dello spazio». Firenze.

https://el.unifi.it/pluginfile.php/841197/mod_resource/content/0/geoanalitica3D.pdf.

CAFORIO Antonio , FERILLI Aldo. (2012). *Fisica! Le leggi della natura. Vol.3*,Firenze: Le Monnier scuola.

CUTNELL, J. D., JOHNSON K. W., YOUNG D., STADLER S. . (2023). *La fisica di Cutnell e Johnson*. Bologna: Zanichelli.

MARTELLI Bruno. (2023). *Geometria e algebra lineare*. Pisa.
<https://people.dm.unipi.it/martelli/Alg%20Lin.pdf>.

PARODI, G.P., OSTILI M., MOCHI ONORI . G. (2006). *L'evoluzione della fisica. Vol. 1*,Milano: Paravia.

SASSO Leonardo, ZANNONE Claudio. (2020). *Colori della matematica*. 4 beta,Novara: De Agostini.

SAVO Alessandro. (2010). «Appunti del Corso di Geometria». Roma.

<https://www.sbai.uniroma1.it/~alessandro.savo/Parte11.pdf>