

Zenone, replicanti e gnomoni

Un' introduzione al mondo frattale

Giorgio Pietrocola *

*APAV; giorgio.pietrocola@gmail.com



DOI : 10.53159/PdM(IV).v7n3.165

Sunto: *Dopo aver introdotto l'autosimilarità con l'effetto Droste, si affronta il paradosso dello stadio di Zenone, in cui l'argomentazione del filosofo porta a considerare una particolare somma infinita e a riflettere sulle problematiche matematiche, storiche e filosofiche connesse. Vengono mostrati due poligoni e due curve frattali con le stesse proprietà replicanti del segmento. Si mostra poi come il setaccio di Apollonio sia un diverso caso di scomposizione di una figura in infinite copie di se stessa. Si evidenzia l'analogia con moderne figure frattali. Infine si considera la definizione di gnomone, data da Erone, evidenziando l'autosimilarità implicita con esempi, anche grafici, che infine conducono al motto storico "eadem mutata resurgo" e alla sua curva ispiratrice.*

Parole Chiave: *Infinito potenziale. Infinito attuale, Autosimilarità. Figura replicante. Limiti. Frattali, Curve di Koch. Falena. Siamese. Paradosso dello stadio di Zenone. Setaccio di Apollonio. Gnomone secondo Erone. Eadem mutata resurgo. Spirale logaritmica.*

Abstract: *After introducing self-similarity with the Droste effect, the Zeno stage paradox is addressed, in which the philosopher's argument leads one to consider a particular infinite sum and reflect on the mathematical, historical and*

philosophical issues involved. Two polygons and two fractal curves with the same replicating properties as the segment are shown. It is then shown how the Apollonian gasket is a different case of the decomposition of a figure into infinite copies of itself. The analogy with modern fractal figures is highlighted. Finally, the definition of gnomon given by Heron is considered, highlighting the implied self-similarity with examples, including graphs, that finally lead to the historical motto "eadem mutata resurgo" and its inspiring curve.

Keywords: *Potential infinity. Current infinity. Self similarity. Rep-tile. Fractals, Koch curves: Siamese, Moth. Zeno's stage paradox. Apollonian gasket. Gnomon according to Heron. Eadem mutata resurgo. Logarithmic spiral.*

1 - Introduzione

L'autosomiglianza è la proprietà di un oggetto del nostro mondo fisico o di una figura geometrica di somigliare a una sua parte come un sasso assomiglia a un suo frammento o un albero a un suo ramo. Somiglianza è un concetto vago che si può tentare di definire in modo rigoroso, per esempio statisticamente, ma che ora preferiamo ignorare limitandoci solo a quella particolare somiglianza che in geometria si chiama similitudine e che, in sostanza, mantiene la forma pur nelle mutate dimensioni. Limiteremo perciò la nostra attenzione all'autosimilarità, cioè, alla proprietà di una figura di essere una copia in miniatura di almeno una sua parte propria, che quindi ripropone la forma originale, sia pure su scala ridotta.

2 – Autosimilarità nell'effetto Droste

Iniziamo quindi questo itinerario divulgativo dall'effetto Droste. Questo prende il nome da una vecchia pubblicità di cacao olandese. Il contenitore del cacao riporta l'immagine di una suora che porta un vassoio contenente una tazza e un contenitore con la stessa immagine della suora con il vassoio. Idealmente, superando i limiti risolutivi della grafica utilizzata per la confezione, il disegno causa un moltiplicarsi all'infinito di immagini sempre più piccole che tendono ad accumularsi in un punto della scatola. In figura 1 si può vedere questo effetto applicato a un setaccio di Apollonio (Pietrocola, 2014). Il punto di accumulazione estremo in basso nella seconda figura, sulla circonferenza massima, ha la proprietà di contenere infinite copie in miniatura dell'intero disegno in qualsiasi zona circostante si voglia considerare.

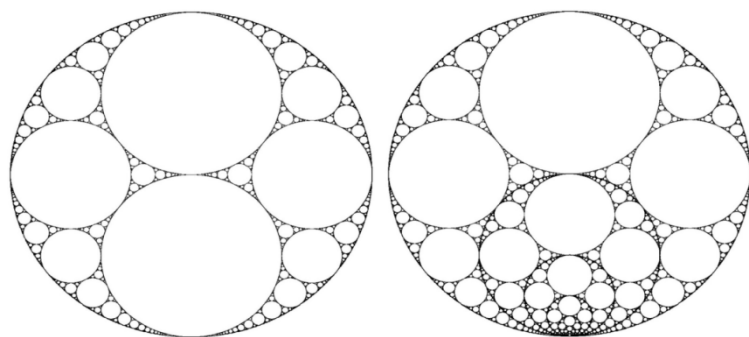


Fig. 1 - A sinistra un setaccio di Apollonio, un cerchio contenente altri cerchi reciprocamente tangenti. A destra l'effetto Droste ottenuto inserendo in un cerchio della precedente figura una copia ridotta della stessa e ripetedoricorsivamente ilprocedimento all'infinito

3 - Zenone di Elea

Zenone (489-431 a.C.), definito da Ludovico Geymonat (1908-1991) ingegno acuto, sottile e vigorosamente polemico, fu allievo di Parmenide nella scuola filosofica di Elea. Come il suo maestro era convinto che la realtà fosse una e immutabile e che il movimento fosse solo una nostra illusione (Geymonat, 1981, pp.40-58) . L'idea può sembrare bizzarra e, forse, così ai più è apparsa per millenni. Per noi moderni però dovrebbe esserlo un po' meno dato che ci siamo ormai abituati alla realtà dell'illusione cinematografica del movimento. Comunque il problema è che il filosofo non si limita a credere, ma dimostra la sua tesi con metodo matematico. Utilizza la tecnica della dimostrazioni per assurdo. In alcuni dei suoi paradossi, Zenone inizia ipotizzando la realtà del movimento, da questa ammissione deduce una catena interminabile di eventi, del tutto simili tra loro, ma su scala sempre più ridotta e questa interminabilità lo porta a rifiutare l'ipotesi iniziale a favore della sua negazione.

Nel famoso "paradosso dello stadio", per esempio, Zenone dimostra l'impossibilità di traversare un segmento. Per gli antichi greci lo spazio della geometria euclidea non era un modello matematico che poteva adattarsi o meno al nostro mondo fisico, ma si identificava con esso. La geometria, come ci ricorda ancora il suo nome, in origine, misurava la terra. La lunghezza dello stadio diventa quindi un oggetto geometrico apparentemente semplice, ma problematico: il segmento. Se si potesse percorrere un segmento - sostiene Zenone - prima si dovrebbe raggiungere la sua metà. A questo punto però ci si troverebbe di fronte a un nuovo segmento residuo, più piccolo, ma simile al precedente, e si dovrebbe quindi

raggiungerne di nuovo la sua metà. Per effetto Droste la procedura indicata si dovrebbe ripetere ricorsivamente in un numero interminabile di eventi perché ogni segmento residuo, per quanto piccolo, avrà la sua metà.

4 - Una somma interminabile

Il paradosso dello stadio evoca in noi una somma di infiniti termini. Infatti, se l'unità di spazio è la lunghezza dello stadio la somma in questione è: $1/2+1/4+1/8+1/16+....$ Gli addendi sempre più piccoli che si susseguono sono tali che il successivo è sempre metà del precedente per cui il rapporto tra due consecutivi, detto ragione della progressione geometrica, è invariante e vale $r=1/2$. Si tratta di una cosiddetta serie geometrica composta da infiniti termini in progressione geometrica. Per evidenziare questa sua caratteristica di invarianza, una serie di questo tipo la chiameremo anche proporzionale.

In figura 2, una spirale proporzionale (Pietrocola, 2023a), con lo stesso rapporto della serie di cui stiamo parlando, suddivide il segmento in infinite parti simili, sempre più prossime all'irraggiungibile polo della spirale posto a fine segmento. Zenone, come in generale la cultura greca antica, concepiva solo l'infinito potenziale. Che quella somma avesse infiniti addendi significava solo che si poteva continuare ad aggiungerne quanti si vuole anche se a un certo punto si presumeva di dover terminare inevitabilmente con un risultato incompleto. Impossibile quindi, da questo punto di vista, terminare la somma ottenendo un risultato unico.

In questa visione, sommare tutti quegli addendi è un'impresa impossibile per cui quella somma non ha risultato.

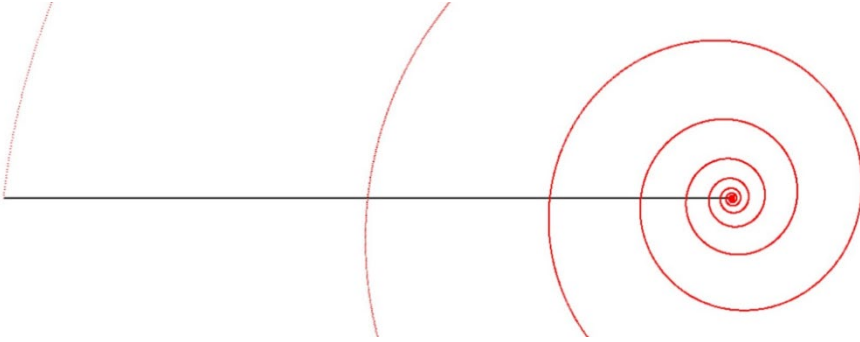


Fig. 2- Nel paradosso dello stadio si scompone il segmento in infiniti segmenti con taglie proporzionali ogni volta dimezzate. Una spirale proporzionale, da sinistra, segna i punti di partenza di ogni tratto. Il polo della spirale, irraggiungibile, è alla fine del segmento (stadio) in prossimità del quale si accumulano infiniti segmenti sempre più piccoli.

5 - Come terminiamo l'interminabile

Oggi noi tutti, raramente consapevoli del dilemma storico e filosofico sottostante, accettiamo senza problemi l'infinito attuale la cui realtà era stata negata esplicitamente dal grande filosofo Aristotele, ma i cui frutti copiosi già il grande matematico Archimede aveva cominciato a cogliere. Alla somma di Zenone, composta da infiniti addendi, oggi assegniamo un risultato preciso, il numero uno, irraggiungibile da un numero finito di addendi, ma a cui però, aumentando il numero degli stessi, possiamo andare vicini quanto vogliamo. In altre parole imponiamo il limite a cui tende la somma come risultato, scavalcando così, con

moderna disinvoltura, le difficoltà concettuali che abbiamo visto. L'analisi matematica, un ramo della matematica sviluppato negli ultimi secoli che credo debba riconoscere al pensiero di Zenone, si è assunta il non facile compito di rendere rigoroso questo modo intuitivo di procedere.

Ecco come oggi calcoliamo il risultato di una successione infinita di numeri proporzionali, cioè in progressione geometrica con un rapporto invariante tra due termini consecutivi nell'ipotesi che questo sia positivo e minore di uno. Indicheremo con r tale rapporto costante usando l'iniziale di ragione, nome con cui viene comunemente indicato questo quoziente invariante.

Partiamo dal caso di una somma con un numero finito di addendi. È facile dimostrare la seguente identità:

$$1+r+r^2+r^3+r^4+\dots+r^{n-1}=(1-r^n)/(1-r)$$

Per verificarla, come in tutte le divisioni, basta moltiplicare il divisore, il binomio $1-r$, per il quoziente, il polinomio di grado $n-1$ che rappresenta una generica somma di n termini in progressione geometrica di ragione r iniziante da 1. Nel fare questa operazione, per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma, il polinomio quoziente si moltiplica prima per 1 poi per $-r$. Si sommano poi i monomi simili osservando il cosiddetto "effetto telescopico" in quanto si annullano quasi tutti i monomi con quelli di segno opposto. Alla fine rimangono solo due monomi formanti il binomio $1-r^n$ che conferma quindi l'identità in questione. Dato che facendo crescere n , il monomio r^n può approssimarsi a piacere a 0 (ricordare che $0 < r < 1$), nel caso della somma con infiniti termini si considera esattamente 0 il che rende la formula precedente più semplice:

$$1+r+r^2+r^3+r^4+\dots=1/(1-r)$$

Nel caso $r=1/2$ si trova il risultato 2. Sottraendo il primo addendo si trova che la somma di Zenone dà per risultato esattamente 1. Questo risultato in fin dei conti, sia pure potenzialmente, era già contenuto nell'argomentazione di Zenone, dato che il segmento iniziale è scomposto in una infinita serie geometrica di segmenti simili, consecutivi decrescenti secondo un rapporto costante.

Esistono altre figure geometriche con la stessa proprietà del segmento zenoniano?

6- Figure replicanti di ordine due

Sì, non sono molte, ma esistono altre figure "rep-2" che si possono scindere in due parti uguali ognuna copia ridotta dell'originale. Notare che, ripetendo il procedimento di suddivisione di un rep-2 nelle due parti ottenute, si ottiene sempre un rep-4, continuando un rep-8 e così via. L'inverso però può non valere perché il quadrato è evidentemente un rep-4, ma non un rep-2, dato che non c'è alcun modo di unire due quadrati per formare un altro quadrato. Distingueremo dicendo che mentre il segmento è una figura replicante di ordine 2, il quadrato è una figura replicante di ordine 4.

Nel piano ci sono due poligoni replicanti di ordine 2 che dovrebbero essere familiari al lettore. Li vedremo anche per confermare intuitivamente la convergenza verso uno della somma di Zenone. Il primo poligono è il mezzo quadrato cioè il triangolo rettangolo isoscele. Il secondo è un rettangolo speciale a cui ho proposto il nome di "gnomonico" (Pietrocola 2022) con la stessa forma del foglio di formato A4 usato

comunemente per le nostre stampanti che ha il rapporto tra lato maggiore e minore uguale alla radice di due. Lo stesso rapporto che troviamo tra ipotenusa e cateto nel primo caso.

A quanto si sa, se il rettangolo gnomonico si generalizza a un parallelogramma con lo stesso rapporto tra i lati, questi sono gli unici poligoni rep-2 (Gardner 1996).

In figura 3 i due poligoni sono stati scomposti in due parti uguali. Una delle due parti viene poi scomposta a sua volta, reiterando il procedimento all'infinito. Ciò crea, in entrambi i casi, una serie geometrica di figure simili, sempre più piccole, con area metà della precedente, che si accumulano all'infinito in un particolare punto. Anche nel segmento zenoniano c'è un punto dove si accumulano infiniti segmenti, sempre più piccoli. È posto proprio alla fine del segmento, in quel traguardo prossimo, ma che la procedura ricorsiva ideata da Zenone non raggiungerà mai. Scegliendo per unità, in ognuno dei due casi, l'area della figura contenente tutte le altre, ritroviamo la nostra somma zenoniana:

$$1/2+1/4+1/8+1/16+\dots=1$$

I punti di accumulazione delle figure, frantumate in copie sempre più piccole di se stesse, formano una sorta di "occhio di dio", dove l'occhio umano si perde quasi subito senza riuscire a cogliere il persistente difetto di riempimento che solo la mente può constatare. Ma la mente, come abbiamo visto, può molto di più. Può annullare questo difetto ponendosi, con un potere che può apparire sovrumano, fuori dagli interminabili addendi per valutarli esattamente nella loro totalità infinita.

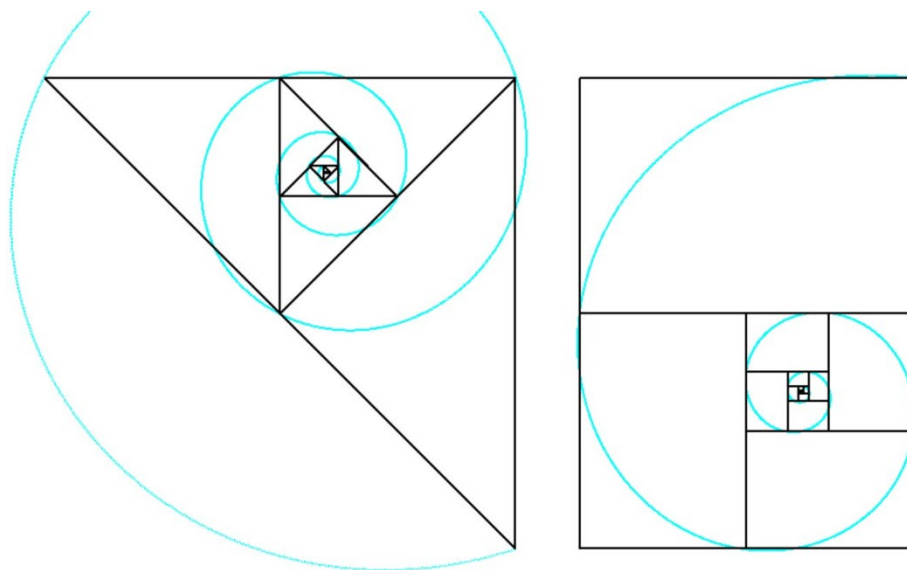


Fig. 3 - Il triangolo rettangolo equilatero e il rettangolo “gnomonico”, come il formato A4, A3 ..., sono due figure replicanti del secondo ordine che possono scomporsi in una infinita serie proporzionale di figure simili che si accumulano in un punto situato nel polo irraggiungibile di una spirale proporzionale

7 - Frattali replicanti

Esistono altre figure replicanti di ordine due? Sì, ma non sono figure ordinarie, sono frattali.

Eccone due. Il primo risale all’inizio del secolo scorso ed è dovuto a Helge van Koch (1870-1924) molto prima che Benoit Mandelbrot, ispirato anche dalle coste della Gran Bretagna, coniasse il termine frattale. Il secondo è una sua recente variante scoperta dall’autore (Pietrocola, 2024).

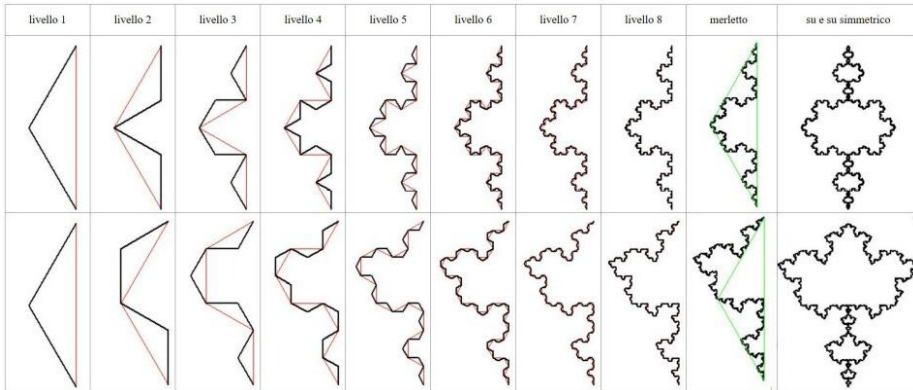


Fig. 4 - Due procedimenti infiniti dello stesso tipo per ottenere, al limite, la curva di Koch e la curva dei lepidotteri due replicanti di ordine due. Le figure finali ottenute per riflessione evidenziano il ripetersi di siamesi e falene, anche loro frattali replicanti, ma di ordine infinito

Due curve molto frastagliate, accettando l'infinito attuale, infinitamente frastagliate! Tanto che, *mirabile dictu*, hanno lunghezza infinita! In Figura 4 sono mostrate le procedure ricorsive infinite generanti le due curve. Entrambe iniziano la procedura generativa con un segmento che possiamo considerare il risultato di livello 0 e da cui erediteranno la proprietà dei replicanti del secondo ordine. Nel primo livello si sostituisce il segmento precedente con due più piccoli angolati di 120 gradi, i due segmenti formerebbero un triangolo isoscele insieme al segmento che sostituiscono. Nei livelli successivi si opera più volte la stessa trasformazione su segmenti sempre più piccoli che sono, ogni volta, in numero doppio della precedente. Ben presto il nostro occhio non percepisce più le variazioni rispetto al livello precedente. Le due curve, dette anche merletti, sono definite come limite infinito della procedura indicata. La differenza tra i due

merletti è nella diversa sequenza della sostituzione dei segmenti che possono essere applicati a destra o a sinistra, come evidenziato nella figura. In rosso ogni volta è riportato il livello precedente (Pietrocola 2025b). In verde il merletto finale è comparato con il triangolo isoscele di partenza (livello 1). Si noti che ai due lati uguali del triangolo isoscele in verde, in entrambi i casi, corrispondono copie in miniatura dell'intero merletto. Infatti anche i due lati uguali, alla fine, hanno subito una trasformazione infinita, del tutto identica perciò a quella subita dalla loro base.

Nell'ultimo riquadro di ogni fila viene formata una figura con l'immagine speculare del rispettivo merletto. Ciò evidenzia due figure ripetute dalle straordinarie proprietà tassellanti e replicanti. Queste infatti, come mostrato in Figura 5, sono frattali replicanti di ordine infinito che ci portano a considerare Apollonio di Perga e i suoi setacci.

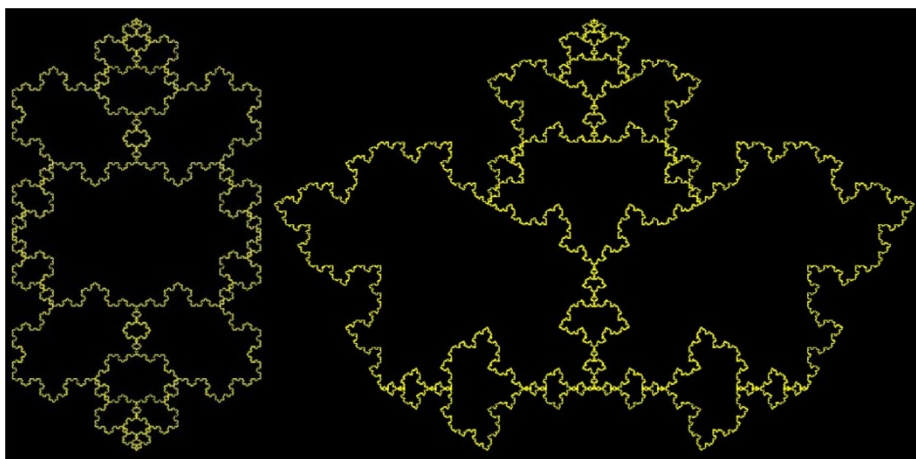


Fig. 5 - Siamese e falena gravidi, cioè scomposti in infinite copie di se stessi. Sono replicanti di ordine infinito, come il setaccio di Apollonio

8 - Apollonio di Perga

Di Apollonio sappiamo che è nato a Perga, attuale Turchia, ed è vissuto ad Alessandria d'Egitto dove è morto circa nel 190 a.C. Due sole sue opere sono giunte fino a noi. La più importante è il trattato sulle sezioni coniche. Apollonio è anche famoso per il suo setaccio.

La costruzione del cosiddetto setaccio, come mostrato in Figura 6, segue questa regola: si parte dalla costruzione di tre cerchi tangenti a due a due e si iscrivono in una circonferenza. A questo punto la continuazione è forzata. Ogni volta si inseriscono i cerchi tangenti possibili. Ogni nuovo inserimento apre nuove possibilità che aumentano esponenzialmente. Quella di Apollonio è una procedura ricorsiva interminabile. Oggi noi, accettando l'infinito attuale, la terminiamo ottenendo un oggetto matematico che classifichiamo come frattale. Suggestionati dalla biologia possiamo considerare il setaccio come un cerchio gravido, pronto a riprodursi frantumandosi in infinite copie di se stesso.

Con il suo setaccio Apollonio ha fatto con il cerchio quello che Zenone ha fatto con il segmento. Lo ha scomposto, potenzialmente, in infinite copie ridotte di se stesso. C'è una differenza però, mentre il segmento è un replicante di ordine 2 il cerchio è un replicante di ordine infinito perché non si può scomporre né in due cerchi né in un numero finito di cerchi.

In figura 5 ci sono altri due replicanti infiniti come il setaccio di Apollonio, ma che sono doppiamente frattali sia in virtù della loro struttura di replicanti, che condividono con il setaccio, sia perché, a differenza del cerchio, sono a loro volta figure frattali (figura 4).

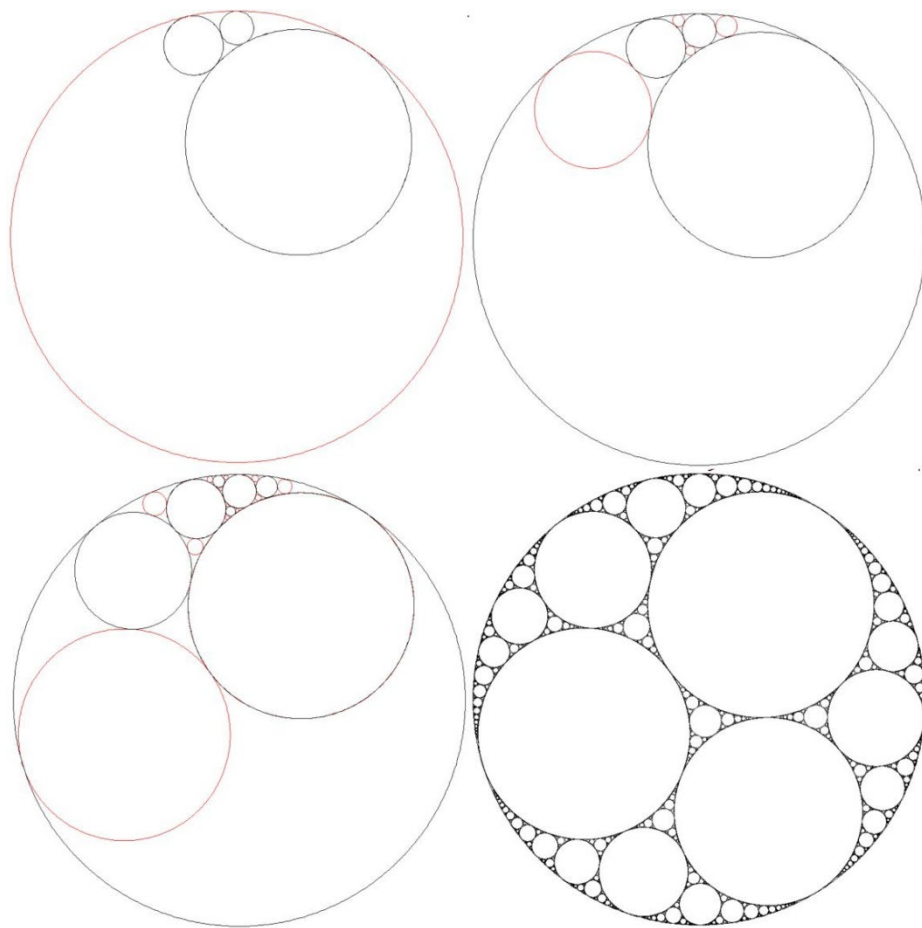


Fig. 6 - La costruzione del setaccio indicata da Apollonio, Si inizia da tre cerchi mutualmente tangenti, poi si costruisce il cerchio tangente contenitore (1° su 4) A questo punto la continuazione è forzata. Si costruiscono i cerchi tangenti possibili (2°) Ciò apre nuove possibilità (3°) Si continua la procedura infinita che presto dà un risultato approssimato indistinguibile dal frattale completo (4°)

Per finire questa breve visita al nostro secondo personaggio della cultura ellenica, mostriamo in figura 7 due setacci, tratti dal Tartapelago (Pietrocola, 2014) che non si possono costruire nel modo indicato da Apollonio.

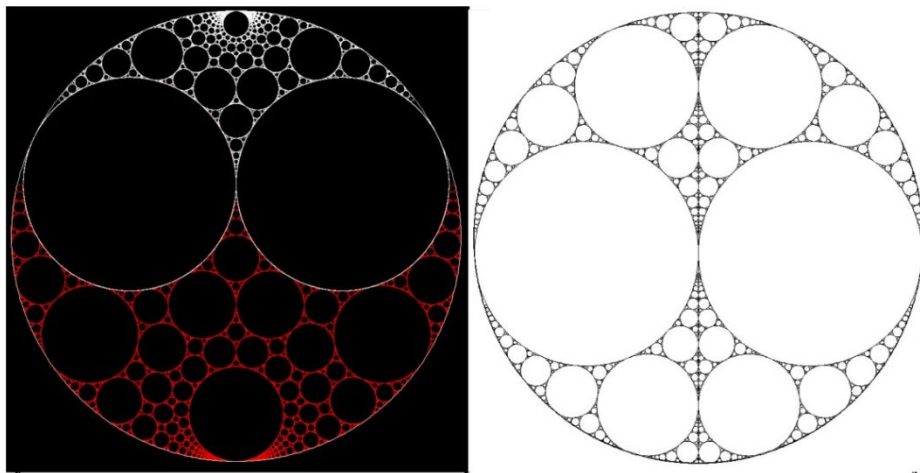


Fig. 7 - Due setacci di Apollonio non canonici.

9 - Erone di Alessandria

Erone fu matematico, astronomo, ingegnere e inventore.

È vissuto in un periodo indeterminato tra il primo e il secondo secolo d.C. Sappiamo che insegnò al museo di Alessandria. Famosa la sua formula per l'area del triangolo in funzione dei lati. Tra le opere giunte sino a noi citiamo il suo trattato *Meccanica*. Qui però ci interessa solo per la sua definizione di gnomone che generalizza un concetto già presente, in casi particolari, negli *Elementi* di Euclide (Frajese 1970). Erone definisce uno gnomone, in generale, come ciò che, "aggiunto (o sottratto) a qualsiasi entità, numero o figura, rende il tutto simile all'entità cui è stato aggiunto (sottratto)". (Zellini, 1999, p.33).

Molto prima di Erone, i greci associavano il termine gnomone ai numeri dispari. Si tenga presente che i numeri erano rappresentati in forma figurata cioè mediante dei punti disposti opportunamente. I numeri quadrati, per esempio, apparivano come punti disposti in file sovrapposte a forma quadrata. Per passare dal numero n^2 al successivo $(n+1)^2$ basta aggiungere due file di n punti, una sotto la base e una accanto all'altezza completando il nuovo quadrato con un punto intermedio che dà la giusta lunghezza ai lati. Si deve quindi aggiungere $2n+1$ cioè un numero dispari che nella rappresentazione figurata evoca una squadra (Geymonat, 1981, pp.40-58). Questa squadra potrebbe essere un collegamento con il più noto significato astronomico del termine gnomone, infatti, opportunamente costruita, con un lato può fare da base e con l'altro ergersi verso il cielo proiettando la sua ombra sul piano di appoggio.

Tornando, come altro esempio, al paradosso zenoniano dello stadio, il segmento dimezzato aggiunto al primo segmento percorso è uno gnomone. Sarebbe più preciso dire che svolge il ruolo di gnomone perché questo concetto è in realtà una relazione tra due figure. In questo particolare caso la relazione risulta riflessiva: il segmento è gnomone di se stesso. Lo stesso accade ai replicanti di ordine 2 come quelli mostrati nelle figure 3 e 4, ma sono casi rari, in generale la proprietà non vale.

Un altro possibile esempio di gnomone è il quadrato che aggiunto al lato maggiore di un rettangolo aureo (rapporto tra lati 1,61...) genera un altro rettangolo aureo. Con ciò si può constatare che la proprietà simmetrica non vale sempre. In questo caso la proprietà simmetrica non vale perché

aggiungendo un rettangolo a un quadrato non è mai possibile ottenere un altro quadrato. Conosco un'unica coppia di figure A,B che gode di questa proprietà cioè tali che A è gnomone di B e viceversa B è gnomone di A.

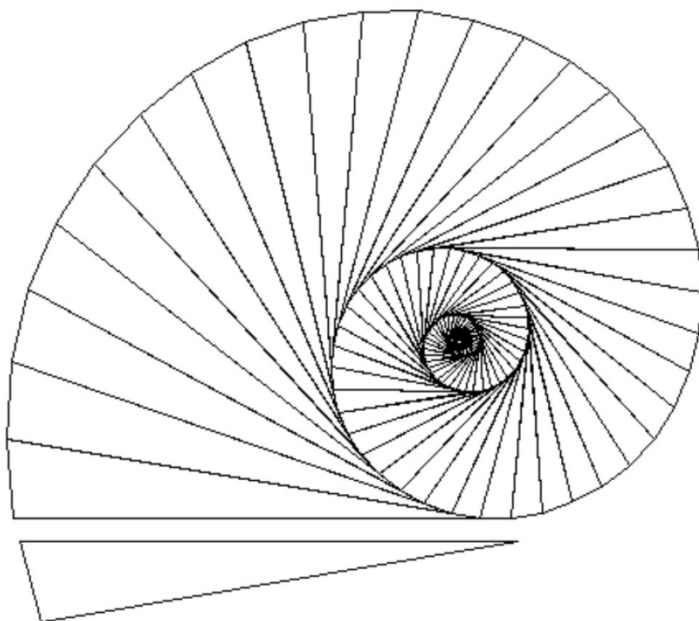


Fig. 8 - Triangolo acuto è lo gnomone della lumaca. In realtà la lumaca è un poligono di trenta lati risultato dell'accumulo di un'infinità di triangoli simili. Il loro lato minore si confonde con la spirale logaritmica che interpolano .

Credo sia l'unico caso, ma la questione è aperta. Si tratta della coppia di triangoli isosceli aurei: l'acutangolo e l'ottusangolo (Pietrocola, 2022).

10 - Eadem mutata resurgo

La definizione di gnomone secondo Erone mi sembrò subito molto interessante e mi indusse a pubblicare, nel sito didattico Maecla per il Tartapelago, “Re Aureo e l’invasione degli gnomoni”, una breve favola e “Collezione di gnomoni”, una raccolta di animazioni geometriche (Pietrocola 2005a, 2005b). Il tema dominante in questi lavori potrebbe riassumersi con il motto “Mutata risorgo”. Le animazioni infatti sono tutte cicliche, figure che perdono o acquistano una loro parte, detta gnomone, rimanendo con la stessa forma e, dopo un opportuno cambiamento di scala, ripetono all’infinito, ricorsivamente, la stessa situazione. Anche nella favola un rettangolo aureo, impersonato da un Re autoreferenziale, si riduce ogni volta a causa di invadenti gnomoni, una schiera infinita di quadrati, che tuttavia non cambiano la sua natura aurea.

La figura 8 è tratta da una delle tante animazioni presenti nel Tartapelago. Si intravedono infiniti gnomoni a forma di triangolo acuto accumulati, uno dopo l’altro, come i segmenti zenoniani, ma il risultato questa volta non mantiene la forma. Si ottiene qualcosa che ricorda una lumaca, ma che è un poligono di trenta lati. Nell’immagine animata la lumaca sta perdendo un suo gnomone, ma non la sua forma che, opportunamente ingrandita, la riporterà alla situazione iniziale e quindi a ripetere, interminabilmente, la stessa trasformazione. I lati minori dei triangoli accumulati nella lumaca formano una spezzata che interpola una spirale proporzionale. Non a caso questa spirale è detta anche spirale della crescita perché può far crescere esseri viventi, come la lumaca, senza variarne la forma.

Questa spirale abbastanza visibile nella lumaca non è un'eccezione (Figure 2,3,4) nelle figure autosimili che, per effetto Droste, si ripetono all'infinito in un vortice di immagini simili, sempre più piccole. La spirale proporzionale è nascosta, ma non troppo, nella definizione di Erone. Possibile che Erone non se ne sia accorto e che solo nel XVI secolo sia stata studiata? A me piace pensare che Erone, di cui ben poco sappiamo, l'abbia descritta e studiata, ma che i documenti che lo attestano non ci siano giunti. Sicuramente molto più tardi questa spirale fu studiata da Jacob Bernoulli (1654-1705) che ne fu così affascinato da volere un'immagine di quella spirale da lui definita mirabile, insieme con il motto "*eadem mutata resurgo*", incisa nella lapide che ora, nella cattedrale di Basilea, lo ricorda ai posteri. Accadde però che la mirabile spira nella realizzazione del monumento risultò una più semplice spirale di Archimede in cui la distanza tra le spire non cambia. Ci piace pensare che, contrariamente a quanto si crede, non sia stato un banale errore, ma una raffinata rappresentazione artistica in scala logaritmica. Ciò si accorderebbe bene con l'usanza prevalente, altrimenti didatticamente poco chiara, di chiamare logaritmica questa spirale.

11 - Conclusione

Concludiamo qui questo breve viaggio introduttivo che, senza pretese di esaurire l'argomento, con intento divulgativo, seguendo un filo conduttore che collega il pensiero antico con il moderno, ha cercato di interessare il lettore presentando con

parole ed immagini alcuni concetti importanti non solo nel variegato mondo frattale.

Tutte le illustrazioni di questo articolo sono state realizzate dall'autore con FMS Logo, una versione del linguaggio Logo che si può scaricare gratis.

Alla url: "www.pietrocola.eu/periodicomat25.htm" chi è interessato può trovare spiegazioni dettagliate su come ottenere questo programma insieme alle procedure per costruire alcune figure frattali presentate in questo articolo con spiegazioni ed esempi del loro uso (Pietrocola, 2025a).

Bibliografia

- FRAJESE Attilio, MACCIONE M. (1970). *Elementi*. Torino: UTET
- GEYMONAT Ludovico (1981). *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, vol. 1. Milano: Garzanti.
- GARDNER Martin (1997). *Enigmi e giochi matematici*, vol.4. Firenze: Sansoni.
- PIETROCOLA Giorgio (2022). Gnomoni aurei e no. «*Archimede*» 1/2022, pp.2-7.
- PIETROCOLA Giorgio (2023). Il siamese di Koch. «*Periodico di Matematica*» (IV) Vol. V(2) giugno, pp. 109-123.
- PIETROCOLA Giorgio (2023a). Spirale proporzionale. «*Mondo Matematico e Dintorni*», Vol 6, No 2, 21-32.
- PIETROCOLA Giorgio (2024), Il siamese e la falena, due frattali per l'arte di Escher. «*Archimede*» 3/2024, pp. 159-166.
- PIETROCOLA Giorgio (2025a). Affinità tra figure frattali «*Periodico di Matematica*» (IV) Vol. VI(4) pp. 109-121.
- PIETROCOLA Giorgio (2025b). *Introduzione ai frattali attraverso Zenone di Elea, Apollonio di Perga e Erone di Alessandria*, Intervento 2° Convegno Ascea: Intrecci e confronti tra le Scienze Matematiche e le Scienze Umanistiche.
- ZELLINI Paolo (1999). *Gnomon. Un'indagine sul numero*. Milano: Adelphi.

