Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (3) dicembre 2025, pp. 7-34

Il passaggio al quoziente e le definizioni per classi

Luca Nicotra*

* Ingegnere meccanico, giornalista pubblicista, Accademico onorario APAV e AFSU, Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", Direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «ArteScienza_magazine», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica»; luca.nicotra1949@gmail.com.

DOI : 10.53159/PdM(IV).v7n3.160

Sunto: *L'articolo prende in considerazione i principali tipi di definizioni. In particolare illustra il processo matematico che in algebra astratta, tramite il passaggio al quoziente di un insieme di oggetti , conduce alla definizione per classi di concetti matematici, tradizionalmente definiti invece per astrazione. Viene anche mostrato che le definizioni per classi, malgrado la sostituzione di una proprietà comune a più classi (che sia però una relazione di equivalenza) con l'insieme di tali classi stesse possa generare un certo scetticismo e sembrare paradossale, è logicamente corretta, a differenza delle definizioni per astrazione che non lo sono. L'articolo illustra le definizioni per classi di alcune entità geometriche (direzione, lunghezza, estensione, ampiezza, vettore) e quella storica di Gottlob Frege di numero naturale (cardinale). L'articolo propone pure una definizione matematica per classi della temperatura, da completarsi con la definizione operativa già nota, come dovuto per le grandezze fisiche.*

Parole Chiave*: Partizione di un insieme, Insieme quoziente, relazione di equivalenza, definizione per classi.*

Abstract: *The article considers the main types of definitions. In particular, it illustrates the mathematical process that in abstract algebra, through the passage to the quotient of a set of objects, leads to the class definition of mathematical concepts, traditionally defined by abstraction. It is also shown that class definitions, although the replacement of a property common to multiple classes (which is, however, an equivalence relation) with the set of such classes themselves may generate a certain skepticism and seem paradoxical, are logically correct, unlike abstraction definitions, which are not. The article illustrates the class definitions of some geometric entities (direction, length, extension, amplitude, vector) and Gottlob Frege's historical definition of the natural number (cardinal). The article also proposes a class-based mathematical definition of temperature, to be completed with the already known operational definition, as is the case for physical quantities.*

Keywords: *Partition of a set, Quotient set, equivalence relation, definition by classes.*

1 – Sulle definizioni

Esistono diversi tipi di definizione. Prima di parlarne, occorrerebbe "definire" lo stesso termine "definizione", ma ciò è impossibile perché genererebbe un circolo vizioso,[1] in quanto l'oggetto della proposizione "definizione della definizione" coincide con il soggetto, ovvero, in altri termini, la proposizione contiene già nel soggetto lo stesso concetto che intende definire. Tutto ciò rientra in una considerazione generale finora mai smentita: non tutto si può definire, così come non tutto si può dimostrare. Da qui l'accettazione necessaria di "conoscenze primitive" poste alla base di ogni argomentazione logica, di cui sono pertanto "presupposti o premesse", distinguibili in enti o concetti primitivi e proposizioni o proprietà primi-

[1] Un caso di *Petitio Principii* noto anche come ragionamento circolare o diallele.

tive. Queste ultime possono essere di due tipi: generali e specifiche. Sono presupposti "generali" quelli che possono essere utilizzati per qualunque argomentazione o scienza, mentre sono presupposti "specifici" quelli che sono utilizzabili soltanto per una specifica scienza, per esempio i postulati della geometria euclidea.[2]

I presupposti generali sono, in un certo senso, anche presupposti dei presupposti specifici, in quanto servono per introdurli e spiegarli, derivano dall'esperienza, dalla lingua, dal linguaggio comune e precedono qualunque ragionamento logico, risultando in tal modo pre-logici. Il concetto di definizione è un presupposto generale, pre-logico e come tale indefinibile. Tuttavia, se ne può rendere l'idea (senza alcuna pretesa definitoria) che si è formata spontaneamente nell'immaginario collettivo, ricorrendo al linguaggio comune: definire significa "spiegare cos'è una cosa per mezzo di altre cose già note o presupposte tali". Il termine "cosa" qui utilizzato ha una connotazione molto generica, concreta o astratta.

A questo punto è lecito chiedersi se esistono diversi tipi di definizione e quali sono.

Le classificazioni possibili dei tipi di definizione variano molto a seconda del criterio adottato e del punto di vista con il quale si affronta la questione, legato al campo di indagine (filosofia, linguistica, matematica, fisica, ecc.). A volte uno stesso tipo di definizione può essere etichettato anche con altri attributi a seconda del criterio di classificazione. È il caso delle de-

[2] Euclide distingueva le proposizioni primitive in assiomi e postulati. Gli assiomi sono, per Euclide, "verità evidenti" per qualunque scienza, mentre i postulati sono proposizioni di cui si "chiede (postula)" di accettare la verità per la geometria soltanto.

finizioni per condizioni e per uso (o contesto), che hanno in comune l'essere anche definizioni implicite, mentre quelle nominali e per classi che hanno in comune l'essere anche definizioni esplicite.

Una panoramica molto articolata, e abbastanza neutrale rispetto alle varie settorializzazioni, si trova nel lungo articolo in tre parti *La definizione nel contesto linguistico e scientifico* di Giulio Platone (1969, 1970).

Sono qui proposte alcune possibili classificazioni:

1. esplicite;
2. implicite;
3. nominali o logiche o proprie;
4. reali o di cosa o lessicali;
5. per condizione (postulati);
6. per uso o contesto;
7. per astrazione;
8. per classi;
9. per induzione o ricorsive;
10. operative (strumentali o mentali);
11. per operatori;
12. per estensione;
13. per relazione.

2 – Il passaggio al quoziente o principio di contrazione

In matematica, secondo la critica moderna, sono preferibili le definizioni esplicite per classi, che sostituiscono le più vecchie definizioni implicite per astrazione. Esse sono basate sul

"Passaggio al quoziente" o "Principio di contrazione" dell'algebra astratta.

2.1 – Partizione di un insieme. Insieme quoziente

Dato un insieme A, una partizione F di A è una famiglia di sottoinsiemi A_i di A:

$$F = \{A_i \mid A_i \subset F,\ i \in I,\ I = \{1,2,\ldots,n\}\}$$

tale che:

1. nessuno dei sottoinsiemi A_i di A è vuoto: $\forall\ i\ A_i \neq \emptyset$;
2. due sottoinsiemi diversi qualunque di A sono disgiunti: $A_i \cap A_h = \emptyset\ \ (\forall\ i \neq h, (i, h) \in I)$;
3. A è l'unione di tutti i suoi sottoinsiemi A_i:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ \ldots \cup A_n$$

In termini equivalenti:

Più sottoinsiemi non vuoti A_1, A_2, A_3 ….. A_n di un insieme A costituiscono una partizione F di A se ogni elemento di A appartiene a uno e uno solo di questi sottoinsiemi.

Di conseguenza, un qualunque elemento a di A individua una sola classe[3] A_i della partizione F di A (il sottoinsieme di A cui appartiene) e viene perciò chiamato *rappresentante della classe* A_i, che si indica con $[a]$.

[3] Qui il termine "classe" è usato come sinonimo di insieme, aggregato, collezione. A volte, invece, da altri esso è usato con tale significato soltanto nel caso qui trattato delle classi di equivalenza, mentre al di fuori di tale caso esso è distinto dal termine "insieme". Per approfondimenti sulle differenze fra "classe" e "insieme" rimando a (Lombardo Radice, 1965, p. 55-59).

Pertanto se a e a' appartengono alla medesima classe A_i della partizione F, si avrà $[a] = [a'] = A_i$. I due elementi a, a' ∈ A si dicono equivalenti nella partizione F e si scrive:

$$a \; \varepsilon \; a'$$

È evidente, ma è anche facilmente dimostrabile (Lombardo Radice, 1965, p. 26) che ogni elemento di A_i può essere scelto come rappresentante di A_i.

La proprietà che permette di "associare" fra loro gli elementi di un insieme A in modo da formare una partizione F di A si dice *relazione di equivalenza,* in quanto essa è valida soltanto fra gli elementi di A che appartengono a una medesima classe A_i della partizione F, che sono quindi "equivalenti" sia perché 'identificano la stessa classe A_i[4] sia perché condividendo la stessa relazione sono "uguali rispetto a tale relazione". Le relazioni di equivalenza generalizzano e precisano il concetto intuitivo di uguaglianza relativa a, uguaglianza rispetto a…, uguaglianza a meno di…

Poiché dalla relazione di equivalenza (simbolo ε) fra due elementi dell'insieme A discende la relazione di uguaglianza fra le classi cui appartengono (e viceversa):

$$(a \; \varepsilon \; a') \leftrightarrow ([a] = [a'])$$

una relazione di equivalenza gode delle stesse proprietà formali della relazione di uguaglianza:

I) *riflessiva:* $a \; \varepsilon \; a'$

II) *simmetrica:* $(a \; \varepsilon \; a') \rightarrow (a' \; \varepsilon \; a)$

[4] Quando si considerano più relazioni di equivalenza si usa la simbologia $[a]_r$ per indicare che l'elemento a individua una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equivalenza r. Si usano anche le espressioni: classe di equivalenza di a modulo r o classe resto modulo r (Lombardo Radice, 1965, pp. 26, 27).

III) *transitiva:* $(a \varepsilon a')$, $(a' \varepsilon a'') \rightarrow (a \varepsilon a'')$

Si conviene di definire *relazione di equivalenza ogni relazione che gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.*[5]

Dunque *ogni relazione che applicata a un insieme A ne determina una partizione*[6] *è una relazione di equivalenza*.

Viceversa si dimostra facilmente che *ogni relazione di equivalenza* ε *fra gli elementi a di un insieme A determina una partizione F di A* (Villa, 1963, pp. 20,21).

In conclusione: e*siste una corrispondenza biunivoca tra le partizioni di un insieme A e le relazioni di equivalenza definite in A* (Lombardo Radice, 1965, p. 27)

Possiamo pertanto così concludere:

Una relazione di equivalenza ε *associata a un insieme A determina la distribuzione degli elementi di A in classi di equivalenza (sottoinsiemi di A) che costituiscono una partizione di A. Queste classi si possono interpretare come elementi di un nuovo insieme, detto insieme quoziente di A rispetto alla relazione di equivalenza* ε *e si scrive: A /* ε*, dove il numeratore indica l'insieme dato A e il denominatore la relazione di equivalenza* ε*.* Da quanto detto è evidente che *l'insieme quoziente A /* ε *non è altro che la partizione F di A rispetto alla relazione di equivalenza* ε*.*

L' insieme quoziente, creato da una partizione di un insieme dato rispetto a una relazione di equivalenza, è pertanto un caso particolare di insieme delle parti: i suoi sottoinsiemi sono tutti fra loro disgiunti.

---

[5] Si può facilmente dimostrare che le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva sono indipendenti con esempi di relazioni che soddisfano due di esse ma non la terza (Lombardo Radice, 1965, p. 25).

[6] O più semplicemente: *ogni relazione associata a una partizione.*

L'operazione che consente di passare dall'insieme A all'insieme quoziente A / ε è detta *Passaggio al quoziente* o *Principio di contrazione*.

I diagrammi di Venn rendono in maniera immediata il significato della partizione di un insieme: in figura 1 è rappresentata la partizione F dell'insieme A nei sottoinsiemi A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, che diventano gli elementi di F.

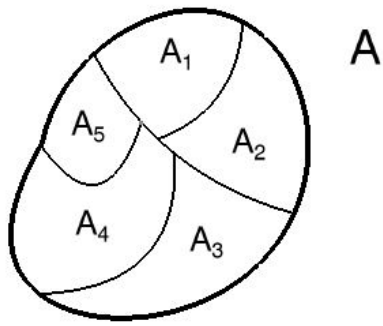

Fig. 1 – Partizione di un insieme.

2.1.1 Casi estremi di partizioni

Per completezza di trattazione del concetto di partizione, è forse utile citare due casi estremi, fra i quali si collocano le partizioni vere e proprie trattate precedentemente, caratterizzate da numero di parti maggiore di 1 e da numero di elementi maggiore di 1 almeno in una delle parti (Frajese, 1968, pp. 335-336).

1° caso - Relazione di identità - La relazione di equivalenza ϵ è la relazione di identità *id*: a ciascun elemento dell'insieme

A corrisponde l'elemento stesso. In tal caso i sottoinsiemi di A che costituiscono la partizione $F(A)$ (ovvero gli elementi dell'insieme quoziente A/id) sono formati ciascuno da un solo elemento di A: si dice che si ha la *polverizzazione* dell'insieme A nei suoi elementi.

2° caso - Relazione universale - La relazione di equivalenza ϵ è la relazione universale U: a un qualunque elemento dell'insieme A corrispondono tutti gli elementi di A. In tal caso la partizione di A è costituita da un solo sottoinsieme di A (coincidente con A stesso), che pertanto è un sottoinsieme improprio di A. Questo caso non può verificarsi nelle partizioni vere e proprie testé considerate perché, nella costruzione della partizione $F(A)$, non rispetterebbe la condizione di considerare sottoinsiemi propri di A.

2.2 – Alcuni esempi pratici di partizione di un insieme

Consideriamo gli allievi di un istituto scolastico. Essi vengono ripartiti in classi secondo un criterio che ovviamente non è soltanto l'età (allievi della stessa età possono essere assegnati a classi dello stesso ordine scolastico annuale ma di sezioni diverse; inoltre nella stessa classe possono essere presenti allievi ripetenti e quindi di età diversa). Tale criterio costituisce comunque una relazione di equivalenza che associata all'insieme di tutti gli allievi della scuola li "ripartisce" nelle diverse classi, in modo tale che nessuna di esse è vuota, la loro unione è l'insieme di tutti gli allievi e ogni allievo appartiene soltanto a una classe.

Consideriamo ora i cittadini della Svizzera. Essi possono essere ripartiti in tre sottoinsiemi T, F, I in base alla loro etnia: tedeschi, francesi, italiani. Tali sottoinsiemi sono non vuoti e

ogni cittadino svizzero appartiene soltanto a uno di essi. L'etnia dei cittadini svizzeri è dunque una relazione di equivalenza che associata all'insieme $\{S\}$ dei cittadini svizzeri genera L'insieme partizione $\{F\}$ = {T, F, I} che ha come elementi i sottoinsiemi T, F, I.

2.3 – Un esempio geometrico di partizione di un insieme

Consideriamo il piano euclideo come insieme dei suoi punti. Le infinite rette parallele di un fascio proprio di rette *a, b, c, ….* possono essere pensate come sottoinsiemi di una partizione del piano. Infatti ogni retta del fascio è un sottoinsieme non vuoto di punti del piano e ogni punto del piano appartiene soltanto a una di esse. In altri termini un fascio proprio di rette può essere inteso come una partizione del piano euclideo.

3 – Definizioni per classi di enti geometrici

In geometria, il passaggio al quoziente consente di formulare in maniera rigorosa varie definizioni esplicite per classi. Qui di seguito alcune.

3.1– Definizione di direzione

Nello spazio E^2 due rette a , b si dicono parallele se non hanno alcun punto in comune oppure coincidono, e si scrive $a \parallel b$. La relazione di parallelismo nell'insieme delle rette del piano euclideo è una relazione di equivalenza, essendo:

$$a \parallel a; \quad a \parallel b \rightarrow b \parallel a; \quad (a \parallel b \, , b \parallel c) \rightarrow a \parallel c.$$

Pertanto la relazione di parallelismo // consente di ripartire le rette del piano in classi di equivalenza ciascuna costituita da un fascio di rette parallele (fascio proprio di rette). Una qualunque di queste classi (interpretata come elemento dell'insieme quoziente rispetto alla relazione di parallelismo nel piano euclideo) dicesi *direzione*.

Possiamo dare la seguente definizione per classi della direzione nello spazio E^2:

Una direzione è una classe di equivalenza dell'insieme quoziente creato dalla relazione di parallelismo nell'insieme delle rette dello spazio E^2.

Oppure, più semplicemente:

Una direzione è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di parallelismo fra le rette dello spazio E^2.

Ovvero, più sinteticamente:

Una direzione è una classe di rette parallele nello spazio E^3.

La stessa definizione può essere estesa allo spazio E^3 aggiungendo alla definizione di parallelismo nello spazio E^2 la condizione che tutte le possibili coppie di rette siano complanari. Il non rispetto di questa condizione denota la presenza di rette sghembe.

Dunque ogni retta r dello spazio E^2 o dello spazio E^3 individua una direzione dello spazio E^2 o dello spazio E^3, che si dice la direzione di r.

3.2 – Definizione di lunghezza

Due segmenti di retta sono congruenti se sono sovrapponibili. La relazione di congruenza (eguaglianza geometrica, simbolo ≅) fra i segmenti dello spazio E^3 è una relazione di equivalenza, essendo:

1. AB ≅ AB ,
2. AB ≅ CD → CD ≅ AB,
3. (AB ≅ CD, CD ≅ EF) →AB ≅ EF.

_Pertanto, applicando la relazione di congruenza all'insieme dei segmenti dello spazio E^3 si ottiene una sua partizione in classi di equivalenza. Ciascuna di queste classi dicesi *lunghezza*.

Possiamo quindi dare la seguente definizione per classi di lunghezza nello spazio E^3:

Una lunghezza è una classe di equivalenza dell'insieme quoziente creato dalla relazione di congruenza nell'insieme dei segmenti dello spazio E^3.

Oppure, più semplicemente:

Una lunghezza è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di congruenza fra i segmenti dello spazio E^3.

Ovvero, più sinteticamente:

Una lunghezza è una classe di segmenti congruenti dello spazio E^3.

Dunque: ogni segmento individua una lunghezza, che dicesi lunghezza del segmento.

3.3 – Definizione di ampiezza

La relazione di congruenza fra angoli dello spazio E^2 è una relazione di equivalenza essendo:

1. AÔB ≅ AÔB ,
2. AÔB ≅ CÔD → CÔD ≅ AÔB,
3. (AÔB ≅ BÔC, BÔC ≅ DÔE) →AÔB ≅ DÔE.

_Pertanto, applicando la relazione di congruenza all'insieme degli angoli dello spazio E^2 si ottiene una sua par-

tizione in classi di equivalenza. Ciascuna di queste classi dicesi *ampiezza*.

Possiamo quindi dare la seguente definizione per classi di ampiezza nello spazio E^2:

Una ampiezza è una classe di equivalenza dell'insieme quoziente creato dalla relazione di congruenza nell'insieme degli angoli dello spazio E^2.

Oppure, più semplicemente:

Una ampiezza è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di congruenza fra gli angoli dello spazio E^2.

Ovvero, più sinteticamente:

Una ampiezza è una classe di angoli congruenti dello spazio E^2.

Dunque: un angolo nello spazio E^2 individua un'ampiezza che si dice l'ampiezza dell'angolo.

3.4 – Definizione di estensione

Nella geometria euclidea due poligoni si dicono equiscomponibili o equivalenti o equiestesi, se si possono scomporre in uno stesso numero di poligoni rispettivamente congruenti. L'equiscomponibilità, godendo delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, è una relazione di equivalenza.

Pertanto, applicando la relazione di equiscomponibilità all'insieme dei poligoni dello spazio E^3 si ottiene una sua partizione in classi di equivalenza, ciascuna delle quali contiene poligoni equiscomponibili. Ciascuna di queste classi dicesi *estensione*.

Possiamo dunque dare la seguente definizione per classi di estensione nello spazio E^3:

Una estensione è una classe di equivalenza dell'insieme quoziente creato dalla relazione di equiscomponibilità nell'insieme dei poligoni dello spazio E^3.

Oppure, più semplicemente:

Una estensione è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equiscomponibilità fra i poligoni dello spazio E^3.

Ovvero, più sinteticamente:

Una estensione è una classe di poligoni equiscomponibili dello spazio E^3.

Dunque: ogni poligono individua una estensione, che dicesi estensione del poligono.

3.5 – Definizione di vettore

Nello spazio E^3 due segmenti orientati si dicono equipollenti se hanno la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo. Si verifica facilmente che la relazione di equipollenza fra segmenti orientati gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva ed è pertanto una relazione di equivalenza.

Consideriamo allora l'insieme degli infiniti segmenti orientati nello spazio E^3 e applichiamo ad esso la relazione di equipollenza. Si ottiene una sua partizione in classi di equivalenza, ciascuna delle quali contiene segmenti equipollenti. Ciascuna di queste classi dicesi *vettore libero*.

Possiamo dare la seguente definizione per classi di *vettore libero* nello spazio E^3:

Un vettore libero è una classe di equivalenza dell'insieme quoziente creato dalla relazione di equipollenza nell'insieme dei segmenti orientati dello spazio E^3.

Oppure, più semplicemente:

Un vettore libero è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equipollenza fra segmenti orientati dello spazio E^3.

Ovvero, più sinteticamente:

Un vettore libero è una classe di segmenti equipollenti dello spazio E^3.

Dunque: un segmento orientato nello spazio E^3 individua un vettore libero (la classe di segmenti equipollenti cui appartiene), di cui è rappresentante. I singoli segmenti orientati appartenenti alla stessa classe di equivalenza rappresentano tutti lo stesso vettore libero ma si distinguono fra loro per il punto di applicazione e sono detti pertanto *vettori applicati*.

4 – La prima storica definizione per classi: la definizione di Frege di numero naturale (cardinale)

Storicamente la prima definizione per classi fu data per il numero naturale (cardinale) da Gottlob Frege nel 1884, nei suoi *Die Grundlagen der Arithmetik* (*I fondamenti dell'Aritmetica*). Nove anni più tardi ne diede una versione più completa e precisa nella sua opera *Grundgesetze der Arithmetik vol. 1* (*Le leggi fondamentali dell'Aritmetica vol 1*) del 1893. La sua definizione di numero (cardinale) rimase però praticamente ignorata per diciassette anni, fino a quando la riscoprì Bertrand Russell nel 1901:[7]

7 È curioso notare che altre importanti definizioni (oggi ben note ai matematici) relative alla logica delle relazioni furono espresse e pubblicate da Frege nella sua opera *Begriffsschrift* del 1879, ma ignorate per ben vent'anni fin quando, ancora una volta, le riscoprì Bertrand Russell.

> *Il problema "che cosa è un numero?" è stato spesso posto, ma è stato correttamente risolto solo oggi. La risposta è stata data da Frege nel 1884, nei suoi Die Grundlagen der Arithmetik. Sebbene questo libro fosse breve, non difficile e di grande importanza, non attirò quasi alcuna attenzione, e la definizione di numero che rimase praticamente sconosciuta fino alla mia riscoperta del 1901*. (Russell, 1970, p. 28).

Così scriveva Bertrand Russell all'inizio del secondo capitolo della sua *Introduzione alla filosofia matematica,* scritta durante i sei mesi di carcere che dovette scontare nel 1918, a causa di un suo articolo pacifista.

Nei *Grundgesetze der Arithmetik vol. 1* così si esprime Frege a proposito della definizione di numero (naturale). Dapprima definisce cosa intende per relazione di equinumerosità:

> *Nelle mie "Grundlagen der Arithmeitk" l'ho fondata sulla relazione che ho chiamata equinumerosità. Nel paragrafo 72 delle mie "Grundlagen" la definisco così: «L'espressione "il concetto F è equinumeroso al concetto G" abbia lo stesso significato dell'espressione "esiste una relazione φ che fa corrispondere uno-a-uno gli oggetti che cadono sotto il concetto F agli oggetti che cadono sotto il concetto G"».*
>
> *Orbene, che cosa vuol dire che la relazione φ fa corrispondere gli oggetti che cadono sotto il concetto F agli oggetti che cadono sotto il concetto G? Vuol dire (par. 71 delle Grundlagen) che ogni oggetto che cade sotto F sta nella relazione ψ con un oggetto che cade sotto G o, più correttamente, che i due enunciati 'a cade sotto F' e 'a sta nella relazione ψ con nessun oggetto che cade sotto G' non possono valere contemporaneamente per nessun a»*

Infine Frege conclude:

> *il numero naturale che spetta al concetto F non è altro che l'estensione del concetto "ugualmente numeroso" a F».*

Per «estensione del concetto "ugualmente numeroso" a F» Frege intendeva ciò che nell'Algebra astratta moderna è la classe delle classi equinumerose (o simili o equipotenti)

In termini moderni possiamo riformulare, molto più semplicemente, la definizione di numero naturale (cardinale) di Frege nel modo seguente.

Due insiemi A, B non vuoti si dicono equipotenti o simili o equinumerosi se fra essi esiste una corrispondenza biunivoca:

$$f\colon A \leftrightarrow B$$

Denotando con $\equiv$ la relazione di equipotenza (o similarità o equinumerosità), si scrive:

$$A \equiv B$$

Poiché gli elementi di A possono essere posti in corripondenza biunivoca con se stessi si ha $A \equiv A$. Una corripondenza biunivoca f è dotata di reciproca f^{-1}, pertanto possiamo scrivere $A \equiv B \rightarrow B \equiv A$. Infine il prodotto operatorio g o f di due corrispondenze biunivoche g , f è ancora una corrispondenza biunivoca e quindi: $A \equiv B$, $B \equiv C \rightarrow A \equiv C$. Dunque la relazione di equipotenza fra insiemi è una relazione di equivalenza, godendo delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Allora applicando la relazione di equipotenza agli insiemi o classi[8] A, B, C, D, E, … di un certo ambiente o universo U, si ottiene una partizione di U in classi di equivalenza, ciascuna delle quali è costituita da tutte le classi equipotenti a una data classe di U. Ciascuna di queste classi di equivalenza è un numero naturale (cardinale).

Possiamo dunque concludere:

[8] Usiamo qui "classe" come sinonimo di insieme,per uniformarci all'uso più diffuso in questo caso.

Un numero naturale (cardinale) è una classe di equivalenza dell'insieme quoziente $U / \equiv$ creato dalla relazione di equipotenza $\equiv$ fra le classi dell'universo U.

Oppure più semplicemente:

Un numero naturale (cardinale) è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equipotenza fra le classi dell'universo U.

Ovvero, più sinteticamente:

Un numero naturale (cardinale) è la classe di tutte le classi fra loro equipotenti.

Dunque: una classe di *U* individua un numero che è il numero della classe. Questa definizione può sembrare circolare, ma non lo è, perché per numero di una classe, da quanto detto, si intende la classe di tutte le classi ad essa equipotenti. Per esempio, il numero di una coppia è la classe di tutte le classi ad essa equipotenti, ovvero il numero 2 è la classe di tutte le coppie. Una singola coppia è un esempio o rappresentante del numero 2, ma non è un esempio di numero; un esempio di numero è il numero 2 ovvero la classe di tutte le coppie.

L'insieme quoziente $U/\equiv$ è l'insieme di tutti i numeri naturali (cardinali).

Rispetto alle precedenti definizioni per classi, nel caso del numero naturale (cardinale), gli elementi di ciascuna classe di equivalenza sono essi stessi già delle classi e non singoli elementi.

L'identificazione del numero con una classe fu contestata da Giuseppe Peano. Così Bertrand Russell rispose alle sue obiezioni:[9]

[9] Anche Edmund Husserl (1859 – 1938) contestò l'identificazione del concetto di numero con una classe (Ales Bello, 2025, pp. 27 e seg.)

> *Così il Peano (Formulario 1901, par. 32) osserva che "non possiamo identificare il numero di (una classe) a con la classe di classi in questione (cioè la classe delle classi simili ad a), questi oggetti avendo proprietà diverse". [...] È probabile che gli sia parso evidente in modo immediato che un numero non è una classe di classi. È tuttavia possibile dire qualcosa per mitigare l'impressione paradossale che desta questo approccio. In primo luogo le parole come coppia o terna denotano chiaramente una classe di classi. Pertanto ciò che dobbiamo dire è che 'due uomini' significa 'prodotto logico di una classe di uomini e di una coppia' 'e 'ci sono due uomini' significa 'c'è una classe di uomini che è anche una coppia'. In secondo luogo, quando ricordiamo che un concetto-classe non è esso stesso un insieme, ma una proprietà con la quale è possibile definire un insieme, noi vediamo che, se definiamo il numero come il concetto-classe, non la classe, un numero si definisce effettivamente come una proprietà comune di una serie di classi simili e di nient'altro* (Russell, 1971, pp. 195-6).

L'equipotenza fra classi è un concetto-classe, ovvero una proprietà caratteristica che permette di definire in maniera intensiva una classe, in quanto proprietà di cui godono tutti i suoi elementi. La sostituzione, accettata dalla matematica, di una proprietà comune a più classi (che sia però una relazione di equivalenza) con l'insieme di tali classi stesse può generare un certo scetticismo e sembrare paradossale. Bertrand Russell ha accuratamente analizzato la questione, concludendo:

> *Ogni volta che la matematica deriva una proprietà comune da una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva, tutti gli scopi matematici della proprietà supposta vengono pienamente raggiunti sostituendo ad essa la classe dei termini che hanno la relazione data con un dato termine; e questo è precisamente il caso presentato dai numeri cardinali* (Russell, 1971, p.197).

In definitiva, l'identificazione dell'insieme di tutti gli insiemi simili fra loro con il concetto astratto di numero cardinale conferma l'idea di Bruno de Finetti della riduzione dell'astratto al multi concreto (de Finetti, 1974). L'astratto, così concepito, non è più una misteriosa proprietà, quasi metafisica, regalmente distaccata dal concreto da cui, pur derivandone, sembra prendere superbamente le distanze, bensì rimane ad esso intimamente legato pur differenziandosene: è l'astratto che condensa in sé una moltitudine di casi concreti, tutti comprendendoli. Senza il riferimento al concreto (o meglio al multiconcreto, ovvero al concreto nelle sue molteplici forme e nelle sue diverse relazioni operative) l'astratto è vuoto di significato:

> *È futile metafisicheria chiedersi ad esempio 'in che cosa consista' il 'concetto di numero', o 'del numero 2' considerato come 'entità' a sé. Allo stesso modo (salvo un po' d'esagerazione) che le lettere 'd, u, e' non hanno un significato di per sé ma lo assumono usandole per formare la parola 'due', così anche il 'due', o 2, non ha neppur esso veramente un significato compiuto così da solo, ma lo ha in quanto è un termine utile per esprimere concetti un po' più concreti, come 2 cani, 2 metri, 2 viaggi; ma anche tali espressioni sono significative solo se ed in quanto possono entrare in proposizioni di cui si sappia operativamente distinguere cosa s'intenda dicendole vere o false (p. es. per concludere se 'questo tavolo è lungo meno di 2 metri' è vera o falsa). Così 2+3 = 5 è un modo sintetico e di per sé vuoto di esprimere il fatto che, in condizioni da precisare operativamente come sopra, ciò vale per cani, metri, viaggi* (de Finetti, 1966, p.10361).

5 – La definizione matematica per classi della temperatura

5.1 – Atipicità della temperatura come grandezza fisica

Come è noto, una grandezza fisica è tale se per essa si possono stabilire inequivocabilmente una unità di misura e un criterio di uguaglianza e somma (e differenza) in modo da poter definire una procedura di misura.

La temperatura, pur essendo accettata come grandezza fisica, in realtà non possiede completamente tali requisiti (Caldirola, 1956, p.55, nota1; Perucca, 1937, p. 538; Bordoni, 1970, pp.173,174). Infatti, non è possibile definire una unità di misura della temperatura bensì soltanto una unità di misura dell'intervallo di temperatura, analogamente a quanto accade per il tempo. Inoltre non gode della proprietà additiva. Mentre, per esempio, fissata l'unità di lunghezza è possibile "costruire" qualunque altra lunghezza allineando un sufficiente numero di volte la lunghezza unitaria e i suoi sottomultipli, ciò invece non accade con la temperatura: non è possibile, con lo stesso metodo additivo, realizzare per esempio una temperatura tripla dell'unità di temperatura perché, se si mettessero a contatto tre corpi con temperatura unitaria, per il principio dell'equilibrio termico (o principio zero della termodinamica) il corpo risultante dalla loro unione avrebbe ancora temperatura unitaria. Per tali ragioni non è possibile stabilire un numero discreto di multipli e sottomultipli della temperatura che ne consentano una misura relativa come per le altre grandezze, bensì è necessario fissare "ogni suo multiplo e sottomultiplo" stabilendo arbitrariamente una scala numerica delle temperature e uno zero, ovvero un punto di riferimento reso necessario del fatto che si possono considerare sol-

tanto intervalli di temperatura. Queste sue caratteristiche, che ne fanno una grandezza fisica atipica, sono dovute al fatto che non è possibile accedere direttamente alla temperatura per misurarla, bensì occorre considerare i suoi effetti su qualche altra grandezza fisica, come accade nei comuni termometri a mercurio, che danno una misura della temperatura attraverso la dilatazione subita dal mercurio in un tubicino di vetro.

Più che una vera grandezza fisica, dunque, la temperatura deve essere considerata un indice dello stato termico di un corpo, cioè di quel suo particolare stato che noi percepiamo con le sensazioni di caldo e freddo: «Si chiama temperatura una grandezza fisica che misura quanto un corpo è caldo o freddo», dice Enrico Fermi (1944, p. 141). Ma è chiaro che definizioni come questa sono in realtà pseudo-definizioni, utili soltanto per focalizzare il significato fisico intuitivo della temperatura, come quest'altra:

> *... la temperatura d'un corpo è quello stato suo particolare pel quale, essendo esso posto a contatto degli altri corpi, può cedere loro calore o riceverne* (Castelfranchi, 1943, p. 421).

Considerata la natura particolare della temperatura, grandezza fisica sotto certi aspetti anomala rispetto ai requisiti tipici delle grandezze fisiche, si propone per essa una definizione per classi da completare con una definizione operativa, peraltro già nota. In tal guisa la temperatura acquista una sua caratterizzazione matematica che la accomuna a un'altra grandezza fisica fondamentale, la lunghezza, anch'essa definibile per classi prima ancora che operativamente come vuole la fisica.

5.2 - Definizione matematica della temperatura

In (Nicotra, 2020) sono stati ampiamente illustrati i concetti di *sistema, stato termodinamico* di un sistema, *stato termodinamico di equilibrio e* di *stati in equilibrio termico,* potendo asserire che la relazione di equilibrio termico *Et (*di uno stesso sistema o di sistemi diversi), godendo delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, è una relazione di equivalenza.

Allora applicando *Et* all'insieme *S* di tutti i possibili stati di equilibrio termico, risulta definita una partizione Θ di *S* in classi di equivalenza θ_i ($i \in I, I = \{1,2,...,n\}$ ciascuna delle quali è costituita da stati in equilibrio termico, pervenendo all'insieme quoziente $\Theta = S/E_t$. Ogni classe θ_i di equivalenza di tale insieme è "una temperatura", mentre l'insieme quoziente Θ è l'insieme di tutte le temperature e quindi definisce il "concetto generale di temperatura". Ne segue che tutti gli stati che sono in equilibrio termico appartengono a una medesima classe θ_i di Θ e quindi hanno la medesima temperatura e viceversa se due stati hanno la stessa temperatura appartengono alla stessa classe θ_i di Θ e quindi sono in equilibrio termico. Il principio di contrazione, o passaggio al quoziente, consente dunque di formulare la seguente definizione: *una temperatura è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equilibrio termico fra gli stati termodinamici di uno stesso sistema o di sistemi diversi* (Nicotra, 2020). O più sinteticamente: *una temperatura è una classe di stati termodinamici (di uno stesso sistema o di sistemi diversi) in equilibrio termico.*

Il passaggio al quoziente, mediante il quale si è fornita la precedente definizione esplicita per classi della temperatura, istituisce tra l'insieme *S* di tutti i possibili stati termodinamici di un sistema (o di sistemi diversi) e l'insieme Θ delle classi di stati in equilibrio termico una mappa univoca di *S* in Θ :

$$f : S \rightarrow \Theta \text{ ovvero } \theta = \theta(s)$$

la quale associa a ogni stato termodinamico $s \in S$ una e una sola classe $\theta \in \Theta$ di stati in equilibrio termico con s, ovvero una e una sola temperatura, in accordo con quanto desiderato per la temperatura come "grandezza-indice" dello stato termodinamico di un sistema.

6 – Obiezioni sul concetto-classe a favore della classe-concetto

> *Il passaggio da un insieme A all'insieme quoziente A/ε (essendo ε una relazione di equivalenza) schematizza e precisa matematicamente il processo di formazione dei concetti a partire da oggetti, e più in generale, l'ordinario processo di astrazione, consistente nell'identificazione di elementi diversi, sì, ma godenti tutti di una comune proprietà. Si tratta, infatti, di considerare classi di elementi (di A) come elementi (di un nuovo insieme, A/ε); gli elementi di A possono essere riguardati come (oggetti) dati, gli elementi di A/ε come "astrazioni concettuali" (classi di oggetti pensate come un unico oggetto).* (Lombardo Radice, 1965, p. 27)

Come già accennato precedentemente a proposito della definizione di numero naturale, può generare un certo scetticismo, e sembrare paradossale, la sostituzione di una proprietà comune a più elementi con la classe di tali elementi, accettata dalla matematica. Nel caso della definizione di numero naturale (cardinale) come classe di classi equipotenti si è già riportata l'osservazione di Russell a tali obiezioni (cfr. n.4 p. 25).

La questione, però, è stata analizzata e affrontata da Russell in termini più generali, ovvero per qualunque definizione per classi. A tale scopo, osserviamo che il passaggio al quoziente, che negli esempi precedenti è stato utilizzato per ottenere defini-

zioni per classi, può condurre in realtà a due tipi di definizioni: implicite per astrazione ed esplicite per classi.

Nelle definizioni implicite per astrazione l'ente viene definito come quell'ente "astratto" che gode della proprietà comune agli elementi di una classe di equivalenza (relazione di equivalenza). In tal caso esso viene definito come concetto-classe.

Nelle definizioni esplicite per classi, invece, l'ente viene definito come classe di equivalenza dell'insieme quoziente. In tal caso viene definito come classe-concetto.[10]

Le definizioni implicite però, come è noto, non precisano la natura dell'ente che definiscono e, secondo alcuni autori, quelle implicite per astrazione che fanno uso di una relazione di equivalenza *r* non ne assicurano nemmeno l'unicità, in quanto *r* caratterizza non soltanto la proprietà o funzione $\phi(x)$ che si vuol definire ma anche ogni altra funzione di questa $f[\phi(x)]$.[11]

Quest'ultima critica è stata posta da molti eminenti matematici e logici e soprattutto da Bertrand Russell e Alfred North Whitehead, sostenitori della sostituzione delle definizioni implicite per astrazione con definizioni esplicite per classi.

---

[10] Di questa denominazione, duale di concetto-classe di Russell, sono debitore al prof. Franco Eugeni durante una chiacchierata telefonica.

[11] Per esempio, la relazione di equivalenza $\phi(a,b) = \phi(a',b') \Leftrightarrow ab'=a'b\ (bb'\neq 0)$ che dovrebbe definire il concetto di frazione per astrazione non lo definisce in quanto la medesima relazione vale per la radice n-esima di un numero frazionario $\sqrt[n]{a/b}$. Così anche la relazione di congruenza fra segmenti che dovrebbe caratterizzare la lunghezza del segmento caratterizza anche l'area del quadrato e il volume dello stesso segmento. Tuttavia, come osserva Giulio Platone, essendo noto l'insieme *G* al quale viene applicata la relazione di equivalenza *R* è chiaro che *R* (e quindi la proprietà o predicato che *R* esprime) si debba intendere valida soltanto per gli elementi dell'insieme *G* (Platone, 1969, p. 175).

Per esempio, a proposito della definizione per astrazione di numero cardinale, così si esprime Bertrand Russell (1971, p. 194):

> *Questa definizione per astrazione, e generalmente il processo impiegato in tali definizioni, soffre di un difetto formale assolutamente fatale: non dimostra che è solo un oggetto a soddisfare alla definizione. Pertanto invece di ottenere una proprietà comune di classi simili, che è il numero delle classi in questione, noi otteniamo una classe di tali proprietà, senza possibilità alcuna di sapere quanti termini questa classe contiene. Per rendere ancora più chiaro questo punto, esaminiamo che cosa significa, nel caso presente, una proprietà comune. Ciò che si intende dire è che ogni classe ha con una certa entità, il suo numero, una relazione che non ha con alcun'altra, ma che tutte le classi simili (e non altre entità) hanno con lo stesso numero. Esiste cioè una relazione molti-uno che ogni classe ha con il proprio numero e con nient'altro. Quindi, nella misura in cui si ammette la definizione per astrazione, qualsiasi serie di entità, con ognuna delle quali qualche classe ha una certa relazione molti-uno, e con una e solo una delle quali una classe data ha questa relazione, e che sono tali che tutte le classi simili ad una classe data hanno questa relazione con l'unica e medesima entità della serie, ci si presenta come la serie dei numeri, ed ogni entità di questa serie è il numero di una certa classe. Se allora esistono molte di queste serie di entità - ed è facile dimostrare che ne esiste un numero infinito - ogni classe avrà molti numeri, e la definizione avrà totalmente fallito il suo compito di definire il numero di una classe. Questo ragionamento è del tutto generale, e mostra come la definizione per astrazione non è mai un processo logicamente valido.*

Bibliografia

ALES BELLO Angela (2025). Husserl e le scienze. Roma: Inriga edizioni.

ALIOTTA Antonio (1930)., *Il problema estetico e didattica dell'arte*. Napoli: Francesco Perrella.

BORDONI Ugo (1970). Fondamenti di Fisica Tecnica, vol. 1. Bologna: Zanichelli.

CALDIROLA Piero (1956). *Elementi di Fisica*, vol.II. Milano: Ghisetti&Corvi.

CASTELFRANCHI Gaetano (1943). *Fisica sperimentale e applicata*, vol. I. Milano: Hoepli.

DE FINETTI Bruno (1966). "Sull'insegnamento della matematica", in «*Homo Faber*», anno XVII, n. 164, 1966.

DE FINETTI Bruno (1974). "Interventi al Convegno della C.I.I.M, Viareggio 24-26 ottobre 1974", in «*Notiziario del Bollettino della Unione Matematica*», dicembre 1974.

FERMI Enrico (1944). *Fisica*, vol. I. Bologna: Zanichelli.

FRAJESE Attilio (1968). *Introduzione elementare alla matematica moderna*. Firenze: Le Monnier.

LOMBARDO RADICE Lucio (1965). *Istituzioni di algebra astratta*. Roma: Feltrinelli.

NICOTRA Luca (2013). "L'interferenza delle associazioni e il concetto di numero". In «*Il Contributo*», Rivista quadrimestrale del Centro per la Filosofia Italiana, Anno XXXV, IV n.s., gennaio/agosto 2013 – N. 1-2.

NICOTRA Luca (2020). "Definizione per classi della temperatura". In «*Periodico di Matematica*» (IV) Vol. II (1) pp. 25-52.

VILLA Mario (cur.) (1963). *Per un insegnamento moderno della matematica.* Bologna, Patron. Testo per le classi pilota in matematica curato dalla Direzione Generale dell'Istruzione Classica OCSE del Ministero della Pubblica Istruzione.

PERUCCA Eligio (1937). *Fisica generale e sperimentale*, vol. I. Torino: UTET.

PLATONE Giulio (1969). "La definizione nel contesto linguistico e scientifico" (I parte). In «*Archimede*» Anno XXI n. 3, pp. 113-128; (II parte), in «*Archimede*» Anno XXI n. 4-5, pp. 172-183.

PLATONE Giulio (1970). La definizione nel contesto linguistico e scientifico (III parte). In «*Archimede*» Anno XXII n. 3-4, pp. 121-138.

RUSSELL Bertrand (1970). *Introduzione alla filosofia matematica*. Roma: Newton Compton.

RUSSELL Bertrand (1971). *I principi della matematica*. Roma: Newton Compton.