

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO SUPERIORE**

**Anno XXXIX - Serie IV – volume VII (3)
Dicembre 2025**

**A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA**

Edizioni



AFSU

MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

PERIODICO DI MATEMATICA

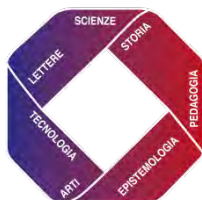
PER

L'INSEGNAMENTO SECONDARIO SUPERIORE

Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

Anno XXXX - Serie IV - Volume VII (3)
Dicembre 2025



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanna Della Vecchia
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa

Comitato Scientifico

Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Franco Francia (La Spezia)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Paolo Severino Manca (Pisa)
Raffaele Mascella (Teramo)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)
Giovanni Vincenzi (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305

eugenif3@gmail.com.

Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693

ferdinando.casolaro@unina.it

Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Segreteria di redazione:

Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2025 Edizioni AFSU -
UniversItalia-Teramo, Roma -
ISSN Online: 2612-6745

® Reg. Versione online n.695/2019
del 19 luglio 2019 e Versione
cartacea n.695/2021 del 3 giugno
2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati.

ISBN 978-88-3293-899-9. Gli
scritti apparsi sulla Rivista possono
essere pubblicati altrove purché se
ne dichiari la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista quadrimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di dicembre 2025 presso UniversItalia

Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 -

e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

INDICE

Luca Nicotra	7
<i>Il passaggio al quoziente e le definizioni per classi</i>	
Bonaventura Paolillo	35
<i>L'esplorazione del moto: una continua sorpresa</i>	
Giuseppe D'Angelo	57
<i>Misura della distanza di un oggetto astronomico con la fotografia</i>	
Umberto Bartocci, Rocco Vittorio Macrì	77
<i>Ama e probabilità</i>	
Andrea Battocchio	101
<i>Dalla distanza di un punto da una retta nello spazio al prodotto vettoriale</i>	
Giorgio Pietrocola	115
<i>Zenone, replicanti e gnomoni. Un' introduzione al mondo frattale</i>	
<i>Profili biografici degli autori</i>	137



https://www.artescienza.online/Rivista%20ArteScienza_magazine/ArteScienza_magazine%20N.10/ArteScienza_magazine%20N.10_On%20line.pdf

Il passaggio al quoziente e le definizioni per classi

Luca Nicotra*

* Ingegnere meccanico, giornalista pubblicista, Accademico onorario APAV e AFSU, Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", Direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «ArteScienza_magazine», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica»; luca.nicotra1949@gmail.com.



DOI : 10.53159/PdM(IV).v7n3.160

Sunto: *L'articolo prende in considerazione i principali tipi di definizioni. In particolare illustra il processo matematico che in algebra astratta, tramite il passaggio al quoziente di un insieme di oggetti, conduce alla definizione per classi di concetti matematici, tradizionalmente definiti invece per astrazione. Viene anche mostrato che le definizioni per classi, malgrado la sostituzione di una proprietà comune a più classi (che sia però una relazione di equivalenza) con l'insieme di tali classi stesse possa generare un certo scetticismo e sembrare paradossale, è logicamente corretta, a differenza delle definizioni per astrazione che non lo sono. L'articolo illustra le definizioni per classi di alcune entità geometriche (direzione, lunghezza, estensione, ampiezza, vettore) e quella storica di Gottlob Frege di numero naturale (cardinale). L'articolo propone pure una definizione matematica per classi della temperatura, da completarsi con la definizione operativa già nota, come dovuto per le grandezze fisiche.*

Parole Chiave: *Partizione di un insieme, Insieme quoziente, relazione di equivalenza, definizione per classi.*

Abstract: *The article considers the main types of definitions. In particular, it illustrates the mathematical process that in abstract algebra, through the passage to the quotient of a set of objects, leads to the class definition of mathematical concepts, traditionally defined by abstraction. It is also shown that class definitions, although the replacement of a property common to multiple classes (which is, however, an equivalence relation) with the set of such classes themselves may generate a certain skepticism and seem paradoxical, are logically correct, unlike abstraction definitions, which are not. The article illustrates the class definitions of some geometric entities (direction, length, extension, amplitude, vector) and Gottlob Frege's historical definition of the natural number (cardinal). The article also proposes a class-based mathematical definition of temperature, to be completed with the already known operational definition, as is the case for physical quantities.*

Keywords: *Partition of a set, Quotient set, equivalence relation, definition by classes.*

1 – Sulle definizioni

Esistono diversi tipi di definizione. Prima di parlarne, occorrerebbe “definire” lo stesso termine “definizione”, ma ciò è impossibile perché genererebbe un circolo vizioso,¹ in quanto l’oggetto della proposizione “definizione della definizione” coincide con il soggetto, ovvero, in altri termini, la proposizione contiene già nel soggetto lo stesso concetto che intende definire. Tutto ciò rientra in una considerazione generale finora mai smentita: non tutto si può definire, così come non tutto si può dimostrare. Da qui l’accettazione necessaria di “conoscenze primitive” poste alla base di ogni argomentazione logica, di cui sono pertanto “presupposti o premesse”, distinguibili in enti o concetti primitivi e proposizioni o proprietà primi-

¹ Un caso di *Petitio Principii* noto anche come ragionamento circolare o dialettale.

tive. Queste ultime possono essere di due tipi: generali e specifiche. Sono presupposti “generali” quelli che possono essere utilizzati per qualunque argomentazione o scienza, mentre sono presupposti “specifici” quelli che sono utilizzabili soltanto per una specifica scienza, per esempio i postulati della geometria euclidea.²

I presupposti generali sono, in un certo senso, anche presupposti dei presupposti specifici, in quanto servono per introdurli e spiegarli, derivano dall’esperienza, dalla lingua, dal linguaggio comune e precedono qualunque ragionamento logico, risultando in tal modo pre-logici. Il concetto di definizione è un presupposto generale, pre-logico e come tale indefinibile. Tuttavia, se ne può rendere l’idea (senza alcuna pretesa definitoria) che si è formata spontaneamente nell’immaginario collettivo, ricorrendo al linguaggio comune: definire significa “spiegare cos’è una cosa per mezzo di altre cose già note o presupposte tali”. Il termine “cosa” qui utilizzato ha una connotazione molto generica, concreta o astratta.

A questo punto è lecito chiedersi se esistono diversi tipi di definizione e quali sono.

Le classificazioni possibili dei tipi di definizione variano molto a seconda del criterio adottato e del punto di vista con il quale si affronta la questione, legato al campo di indagine (filosofia, linguistica, matematica, fisica, ecc.). A volte uno stesso tipo di definizione può essere etichettato anche con altri attributi a seconda del criterio di classificazione. È il caso delle de-

² Euclide distingueva le proposizioni primitive in assiomi e postulati. Gli assiomi sono, per Euclide, “verità evidenti” per qualunque scienza, mentre i postulati sono proposizioni di cui si “chiede (postula)” di accettare la verità per la geometria soltanto.

finizioni per condizioni e per uso (o contesto), che hanno in comune l'essere anche definizioni implicite, mentre quelle nominali e per classi che hanno in comune l'essere anche definizioni esplicite.

Una panoramica molto articolata, e abbastanza neutrale rispetto alle varie settorializzazioni, si trova nel lungo articolo in tre parti *La definizione nel contesto linguistico e scientifico* di Giulio Platone (1969, 1970).

Sono qui proposte alcune possibili classificazioni:

1. esplicite;
2. implicite;
3. nominali o logiche o proprie;
4. reali o di cosa o lessicali;
5. per condizione (postulati);
6. per uso o contesto;
7. per astrazione;
8. per classi;
9. per induzione o ricorsive;
10. operative (strumentali o mentali);
11. per operatori;
12. per estensione;
13. per relazione.

2 – Il passaggio al quoziente o principio di contrazione

In matematica, secondo la critica moderna, sono preferibili le definizioni esplicite per classi, che sostituiscono le più vecchie definizioni implicite per astrazione. Esse sono basate sul

“Passaggio al quoziente” o “Principio di contrazione” dell’algebra astratta.

2.1 – Partizione di un insieme. Insieme quoziente

Dato un insieme A , una partizione F di A è una famiglia di sottoinsiemi A_i di A :

$$F = \{A_i \mid A_i \subset F, i \in I, I = \{1, 2, \dots, n\}\}$$

tale che:

1. nessuno dei sottoinsiemi A_i di A è vuoto: $\forall i \ A_i \neq \emptyset$;
2. due sottoinsiemi diversi qualunque di A sono disgiunti:
 $A_i \cap A_h = \emptyset \ (\forall i \neq h, (i, h) \in I)$;
3. A è l’unione di tutti i suoi sottoinsiemi A_i :

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n$$

In termini equivalenti:

Più sottoinsiemi non vuoti $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ di un insieme A costituiscono una partizione F di A se ogni elemento di A appartiene a uno e uno solo di questi sottoinsiemi.

Di conseguenza, un qualunque elemento a di A individua una sola classe³ A_i della partizione F di A (il sottoinsieme di A cui appartiene) e viene perciò chiamato *rappresentante della classe A_i* , che si indica con $[a]$.

³ Qui il termine “classe” è usato come sinonimo di insieme, aggregato, collezione. A volte, invece, da altri esso è usato con tale significato soltanto nel caso qui trattato delle classi di equivalenza, mentre al di fuori di tale caso esso è distinto dal termine “insieme”. Per approfondimenti sulle differenze fra “classe” e “insieme” rimando a (Lombardo Radice, 1965, p. 55-59).

Pertanto se a e a' appartengono alla medesima classe A_i della partizione F , si avrà $[a] = [a'] = A_i$. I due elementi $a, a' \in A$ si dicono equivalenti nella partizione F e si scrive:

$$a \varepsilon a'$$

È evidente, ma è anche facilmente dimostrabile (Lombardo Radice, 1965, p. 26) che ogni elemento di A_i può essere scelto come rappresentante di A_i .

La proprietà che permette di “associare” fra loro gli elementi di un insieme A in modo da formare una partizione F di A si dice *relazione di equivalenza*, in quanto essa è valida soltanto fra gli elementi di A che appartengono a una medesima classe A_i della partizione F , che sono quindi “equivalenti” sia perché ‘identificano la stessa classe A_i ⁴ sia perché condividendo la stessa relazione sono “uguali rispetto a tale relazione”. Le relazioni di equivalenza generalizzano e precisano il concetto intuitivo di uguaglianza relativa a, uguaglianza rispetto a..., uguaglianza a meno di...

Poiché dalla relazione di equivalenza (simbolo ε) fra due elementi dell’insieme A discende la relazione di uguaglianza fra le classi cui appartengono (e viceversa):

$$(a \varepsilon a') \leftrightarrow ([a] = [a'])$$

una relazione di equivalenza gode delle stesse proprietà formali della relazione di uguaglianza:

- I) *riflessiva*: $a \varepsilon a'$
- II) *simmetrica*: $(a \varepsilon a') \rightarrow (a' \varepsilon a)$

⁴ Quando si considerano più relazioni di equivalenza si usa la simbologia $[a]_r$ per indicare che l’elemento a individua una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equivalenza r . Si usano anche le espressioni: classe di equivalenza di a modulo r o classe resto modulo r (Lombardo Radice, 1965, pp. 26, 27).

III) *transitiva*: $(a \varepsilon a'), (a' \varepsilon a'') \rightarrow (a \varepsilon a'')$

Si conviene di definire *relazione di equivalenza* ogni relazione che gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.⁵

Dunque ogni relazione che applicata a un insieme A ne determina una partizione⁶ è una relazione di equivalenza.

Viceversa si dimostra facilmente che ogni relazione di equivalenza ε fra gli elementi a di un insieme A determina una partizione F di A (Villa, 1963, pp. 20,21).

In conclusione: esiste una corrispondenza biunivoca tra le partizioni di un insieme A e le relazioni di equivalenza definite in A (Lombardo Radice, 1965, p. 27)

Possiamo pertanto così concludere:

Una relazione di equivalenza ε associata a un insieme A determina la distribuzione degli elementi di A in classi di equivalenza (sottoinsiemi di A) che costituiscono una partizione di A . Queste classi si possono interpretare come elementi di un nuovo insieme, detto insieme quoziente di A rispetto alla relazione di equivalenza ε e si scrive: A / ε , dove il numeratore indica l'insieme dato A e il denominatore la relazione di equivalenza ε . Da quanto detto è evidente che l'insieme quoziente A / ε non è altro che la partizione F di A rispetto alla relazione di equivalenza ε .

L'insieme quoziente, creato da una partizione di un insieme dato rispetto a una relazione di equivalenza, è pertanto un caso particolare di insieme delle parti: i suoi sottoinsiemi sono tutti fra loro disgiunti.

⁵ Si può facilmente dimostrare che le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva sono indipendenti con esempi di relazioni che soddisfano due di esse ma non la terza (Lombardo Radice, 1965, p. 25).

⁶ O più semplicemente: ogni relazione associata a una partizione.

L'operazione che consente di passare dall'insieme A all'insieme quoziente A / ε è detta *Passaggio al quoziente* o *Principio di contrazione*.

I diagrammi di Venn rendono in maniera immediata il significato della partizione di un insieme: in figura 1 è rappresentata la partizione F dell'insieme A nei sottoinsiemi A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , che diventano gli elementi di F .

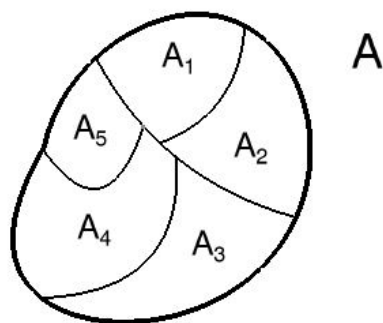


Fig. 1 – Partizione di un insieme.

2.1.1 Casi estremi di partizioni

Per completezza di trattazione del concetto di partizione, è forse utile citare due casi estremi, fra i quali si collocano le partizioni vere e proprie trattate precedentemente, caratterizzate da numero di parti maggiore di 1 e da numero di elementi maggiore di 1 almeno in una delle parti (Frajese, 1968, pp. 335-336).

1° caso - Relazione di identità - La relazione di equivalenza ϵ è la relazione di identità *id*: a ciascun elemento dell'insieme

A corrisponde l'elemento stesso. In tal caso i sottoinsiemi di A che costituiscono la partizione $F(A)$ (ovvero gli elementi dell'insieme quoziente A/id) sono formati ciascuno da un solo elemento di A : si dice che si ha la *polverizzazione* dell'insieme A nei suoi elementi.

2° caso - Relazione universale - La relazione di equivalenza ϵ è la relazione universale U : a un qualunque elemento dell'insieme A corrispondono tutti gli elementi di A . In tal caso la partizione di A è costituita da un solo sottoinsieme di A (coincidente con A stesso), che pertanto è un sottoinsieme improprio di A . Questo caso non può verificarsi nelle partizioni vere e proprie testé considerate perché, nella costruzione della partizione $F(A)$, non rispetterebbe la condizione di considerare sottoinsiemi propri di A .

2.2 - Alcuni esempi pratici di partizione di un insieme

Consideriamo gli allievi di un istituto scolastico. Essi vengono ripartiti in classi secondo un criterio che ovviamente non è soltanto l'età (allievi della stessa età possono essere assegnati a classi dello stesso ordine scolastico annuale ma di sezioni diverse; inoltre nella stessa classe possono essere presenti allievi ripetenti e quindi di età diversa). Tale criterio costituisce comunque una relazione di equivalenza che associata all'insieme di tutti gli allievi della scuola li "ripartisce" nelle diverse classi, in modo tale che nessuna di esse è vuota, la loro unione è l'insieme di tutti gli allievi e ogni allievo appartiene soltanto a una classe.

Consideriamo ora i cittadini della Svizzera. Essi possono essere ripartiti in tre sottoinsiemi T , F , I in base alla loro etnia: tedeschi, francesi, italiani. Tali sottoinsiemi sono non vuoti e

ogni cittadino svizzero appartiene soltanto a uno di essi. L'etnia dei cittadini svizzeri è dunque una relazione di equivalenza che associata all'insieme $\{S\}$ dei cittadini svizzeri genera l'insieme partizione $\{F\} = \{T, F, I\}$ che ha come elementi i sottoinsiemi T, F, I .

2.3 – Un esempio geometrico di partizione di un insieme

Consideriamo il piano euclideo come insieme dei suoi punti. Le infinite rette parallele di un fascio proprio di rette $a, b, c, \dots$ possono essere pensate come sottoinsiemi di una partizione del piano. Infatti ogni retta del fascio è un sottoinsieme non vuoto di punti del piano e ogni punto del piano appartiene soltanto a una di esse. In altri termini un fascio proprio di rette può essere inteso come una partizione del piano euclideo.

3 – Definizioni per classi di enti geometrici

In geometria, il passaggio al quoziente consente di formulare in maniera rigorosa varie definizioni esplicite per classi. Qui di seguito alcune.

3.1– Definizione di direzione

Nello spazio E^2 due rette a, b si dicono parallele se non hanno alcun punto in comune oppure coincidono, e si scrive $a \parallel b$. La relazione di parallelismo nell'insieme delle rette del piano euclideo è una relazione di equivalenza, essendo:

$$a \parallel a; \quad a \parallel b \rightarrow b \parallel a; \quad (a \parallel b, b \parallel c) \rightarrow a \parallel c.$$

Pertanto la relazione di parallelismo $\parallel$ consente di ripartire le rette del piano in classi di equivalenza ciascuna costituita da un fascio di rette parallele (fascio proprio di rette). Una qualunque di queste classi (interpretata come elemento dell'insieme quoziente rispetto alla relazione di parallelismo nel piano euclideo) dicesi *direzione*.

Possiamo dare la seguente definizione per classi della direzione nello spazio E^2 :

Una direzione è una classe di equivalenza dell'insieme quoziente creato dalla relazione di parallelismo nell'insieme delle rette dello spazio E^2 .

Oppure, più semplicemente:

Una direzione è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di parallelismo fra le rette dello spazio E^2 .

Ovvero, più sinteticamente:

Una direzione è una classe di rette parallele nello spazio E^3 .

La stessa definizione può essere estesa allo spazio E^3 aggiungendo alla definizione di parallelismo nello spazio E^2 la condizione che tutte le possibili coppie di rette siano complanari. Il non rispetto di questa condizione denota la presenza di rette sghembe.

Dunque ogni retta r dello spazio E^2 o dello spazio E^3 individua una direzione dello spazio E^2 o dello spazio E^3 , che si dice la direzione di r .

3.2 - Definizione di lunghezza

Due segmenti di retta sono congruenti se sono sovrapponibili. La relazione di congruenza (eguaglianza geometrica, simbolo $\cong$) fra i segmenti dello spazio E^3 è una relazione di equivalenza, essendo:

1. $AB \cong AB$,
2. $AB \cong CD \rightarrow CD \cong AB$,
3. $(AB \cong CD, CD \cong EF) \rightarrow AB \cong EF$.

Pertanto, applicando la relazione di congruenza all'insieme dei segmenti dello spazio E^3 si ottiene una sua partizione in classi di equivalenza. Ciascuna di queste classi dice-
si *lunghezza*.

Possiamo quindi dare la seguente definizione per classi di lunghezza nello spazio E^3 :

Una lunghezza è una classe di equivalenza dell'insieme quoziente creato dalla relazione di congruenza nell'insieme dei segmenti dello spazio E^3 .

Oppure, più semplicemente:

Una lunghezza è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di congruenza fra i segmenti dello spazio E^3 .

Ovvero, più sinteticamente:

Una lunghezza è una classe di segmenti congruenti dello spazio E^3 .

Dunque: ogni segmento individua una lunghezza, che di-
cesi lunghezza del segmento.

3.3 - Definizione di ampiezza

La relazione di congruenza fra angoli dello spazio E^2 è una relazione di equivalenza essendo:

1. $\hat{A}OB \cong \hat{A}OB$,
2. $\hat{A}OB \cong \hat{C}OD \rightarrow \hat{C}OD \cong \hat{A}OB$,
3. $(\hat{A}OB \cong \hat{B}OC, \hat{B}OC \cong \hat{D}OE) \rightarrow \hat{A}OB \cong \hat{D}OE$.

Pertanto, applicando la relazione di congruenza all'insieme degli angoli dello spazio E^2 si ottiene una sua par-

tizione in classi di equivalenza. Ciascuna di queste classi dicesi *ampiezza*.

Possiamo quindi dare la seguente definizione per classi di ampiezza nello spazio E^2 :

Una ampiezza è una classe di equivalenza dell'insieme quoziente creato dalla relazione di congruenza nell'insieme degli angoli dello spazio E^2 .

Oppure, più semplicemente:

Una ampiezza è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di congruenza fra gli angoli dello spazio E^2 .

Ovvero, più sinteticamente:

Una ampiezza è una classe di angoli congruenti dello spazio E^2 .

Dunque: un angolo nello spazio E^2 individua un'ampiezza che si dice l'ampiezza dell'angolo.

3.4 – Definizione di estensione

Nella geometria euclidea due poligoni si dicono equiscomponibili o equivalenti o equiestesi, se si possono scomporre in uno stesso numero di poligoni rispettivamente congruenti. L'equiscomponibilità, godendo delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, è una relazione di equivalenza.

Pertanto, applicando la relazione di equiscomponibilità all'insieme dei poligoni dello spazio E^3 si ottiene una sua partizione in classi di equivalenza, ciascuna delle quali contiene poligoni equiscomponibili. Ciascuna di queste classi dicesi *estensione*.

Possiamo dunque dare la seguente definizione per classi di estensione nello spazio E^3 :

Una estensione è una classe di equivalenza dell'insieme quoziente creato dalla relazione di equiscomponibilità nell'insieme dei poligoni dello spazio E^3 .

Oppure, più semplicemente:

Una estensione è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equiscomponibilità fra i poligoni dello spazio E^3 .

Ovvero, più sinteticamente:

Una estensione è una classe di poligoni equiscomponibili dello spazio E^3 .

Dunque: ogni poligono individua una estensione, che dicesi estensione del poligono.

3.5 – Definizione di vettore

Nello spazio E^3 due segmenti orientati si dicono equipollenti se hanno la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo. Si verifica facilmente che la relazione di equipollenza fra segmenti orientati gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva ed è pertanto una relazione di equivalenza.

Consideriamo allora l'insieme degli infiniti segmenti orientati nello spazio E^3 e applichiamo ad esso la relazione di equipollenza. Si ottiene una sua partizione in classi di equivalenza, ciascuna delle quali contiene segmenti equipollenti. Ciascuna di queste classi dicesi *vettore libero*.

Possiamo dare la seguente definizione per classi di *vettore libero* nello spazio E^3 :

Un vettore libero è una classe di equivalenza dell'insieme quoziente creato dalla relazione di equipollenza nell'insieme dei segmenti orientati dello spazio E^3 .

Oppure, più semplicemente:

Un vettore libero è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equipollenza fra segmenti orientati dello spazio E^3 .

Ovvero, più sinteticamente:

Un vettore libero è una classe di segmenti equipollenti dello spazio E^3 .

Dunque: un segmento orientato nello spazio E^3 individua un vettore libero (la classe di segmenti equipollenti cui appartiene), di cui è rappresentante. I singoli segmenti orientati appartenenti alla stessa classe di equivalenza rappresentano tutti lo stesso vettore libero ma si distinguono fra loro per il punto di applicazione e sono detti pertanto *vettori applicati*.

4 – La prima storica definizione per classi: la definizione di Frege di numero naturale (cardinale)

Storicamente la prima definizione per classi fu data per il numero naturale (cardinale) da Gottlob Frege nel 1884, nei suoi *Die Grundlagen der Arithmetik* (*I fondamenti dell'Aritmetica*). Nove anni più tardi ne diede una versione più completa e precisa nella sua opera *Grundgesetze der Arithmetik vol. 1* (*Le leggi fondamentali dell'Aritmetica vol 1*) del 1893. La sua definizione di numero (cardinale) rimase però praticamente ignorata per diciassette anni, fino a quando la riscoprì Bertrand Russell nel 1901:⁷

⁷ È curioso notare che altre importanti definizioni (oggi ben note ai matematici) relative alla logica delle relazioni furono espresse e pubblicate da Frege nella sua opera *Begriffsschrift* del 1879, ma ignorate per ben vent'anni fin quando, ancora una volta, le riscoprì Bertrand Russell.

Il problema “che cosa è un numero?” è stato spesso posto, ma è stato correttamente risolto solo oggi. La risposta è stata data da Frege nel 1884, nei suoi Die Grundlagen der Arithmetik. Sebbene questo libro fosse breve, non difficile e di grande importanza, non attirò quasi alcuna attenzione, e la definizione di numero che rimase praticamente sconosciuta fino alla mia riscoperta del 1901. (Russell, 1970, p. 28).

Così scriveva Bertrand Russell all’inizio del secondo capitolo della sua *Introduzione alla filosofia matematica*, scritta durante i sei mesi di carcere che dovette scontare nel 1918, a causa di un suo articolo pacifista.

Nei *Grundgesetze der Arithmetik* vol. 1 così si esprime Frege a proposito della definizione di numero (naturale). Dapprima definisce cosa intende per relazione di equinumerosità:

Nelle mie “Grundlagen der Arithmetik” l’ho fondata sulla relazione che ho chiamata equinumerosità. Nel paragrafo 72 delle mie “Grundlagen” la definisco così: «L’espressione “il concetto F è equinumeroso al concetto G” abbia lo stesso significato dell’espressione “esiste una relazione φ che fa corrispondere uno-a-uno gli oggetti che cadono sotto il concetto F agli oggetti che cadono sotto il concetto G”».

Orbene, che cosa vuol dire che la relazione φ fa corrispondere gli oggetti che cadono sotto il concetto F agli oggetti che cadono sotto il concetto G? Vuol dire (par. 71 delle Grundlagen) che ogni oggetto che cade sotto F sta nella relazione φ con un oggetto che cade sotto G o, più correttamente, che i due enunciati ‘a cade sotto F’ e ‘a sta nella relazione φ con nessun oggetto che cade sotto G’ non possono valere contemporaneamente per nessun a»

Infine Frege conclude:

il numero naturale che spetta al concetto F non è altro che l’estensione del concetto “ugualmente numeroso” a F».

Per «estensione del concetto “ugualmente numeroso” a F » Frege intendeva ciò che nell’Algebra astratta moderna è la classe delle classi equinumerose (o simili o equipotenti)

In termini moderni possiamo riformulare, molto più semplicemente, la definizione di numero naturale (cardinale) di Frege nel modo seguente.

Due insiemi A, B non vuoti si dicono equipotenti o simili o equinumerosi se fra essi esiste una corrispondenza biunivoca:

$$f: A \leftrightarrow B$$

Denotando con $\equiv$ la relazione di equipotenza (o similarità o equinumerosità), si scrive:

$$A \equiv B$$

Poiché gli elementi di A possono essere posti in corrispondenza biunivoca con se stessi si ha $A \equiv A$. Una corrispondenza biunivoca f è dotata di reciproca f^{-1} , pertanto possiamo scrivere $A \equiv B \rightarrow B \equiv A$. Infine il prodotto operatorio g o f di due corrispondenze biunivoche g, f è ancora una corrispondenza biunivoca e quindi: $A \equiv B, B \equiv C \rightarrow A \equiv C$. Dunque la relazione di equipotenza fra insiemi è una relazione di equivalenza, godendo delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Allora applicando la relazione di equipotenza agli insiemi o classi⁸ $A, B, C, D, E, \dots$ di un certo ambiente o universo U , si ottiene una partizione di U in classi di equivalenza, ciascuna delle quali è costituita da tutte le classi equipotenti a una data classe di U . Ciascuna di queste classi di equivalenza è un numero naturale (cardinale).

Possiamo dunque concludere:

⁸ Usiamo qui “classe” come sinonimo di insieme, per uniformarci all’uso più diffuso in questo caso.

Un numero naturale (cardinale) è una classe di equivalenza dell'insieme quoziente $U / \equiv$ creato dalla relazione di equipotenza $\equiv$ fra le classi dell'universo U .

Oppure più semplicemente:

Un numero naturale (cardinale) è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equipotenza fra le classi dell'universo U .

Ovvero, più sinteticamente:

Un numero naturale (cardinale) è la classe di tutte le classi fra loro equipotenti.

Dunque: una classe di U individua un numero che è il numero della classe. Questa definizione può sembrare circolare, ma non lo è, perché per numero di una classe, da quanto detto, si intende la classe di tutte le classi ad essa equipotenti. Per esempio, il numero di una coppia è la classe di tutte le classi ad essa equipotenti, ovvero il numero 2 è la classe di tutte le coppie. Una singola coppia è un esempio o rappresentante del numero 2, ma non è un esempio di numero; un esempio di numero è il numero 2 ovvero la classe di tutte le coppie.

L'insieme quoziente $U / \equiv$ è l'insieme di tutti i numeri naturali (cardinali).

Rispetto alle precedenti definizioni per classi, nel caso del numero naturale (cardinale), gli elementi di ciascuna classe di equivalenza sono essi stessi già delle classi e non singoli elementi.

L'identificazione del numero con una classe fu contestata da Giuseppe Peano. Così Bertrand Russell rispose alle sue obiezioni:⁹

⁹ Anche Edmund Husserl (1859 – 1938) contestò l'identificazione del concetto di numero con una classe (Ales Bello, 2025, pp. 27 e seg.)

Così il Peano (Formulario 1901, par. 32) osserva che “non possiamo identificare il numero di (una classe) a con la classe di classi in questione (cioè la classe delle classi simili ad a), questi oggetti avendo proprietà diverse”. [...] È probabile che gli sia parso evidente in modo immediato che un numero non è una classe di classi. È tuttavia possibile dire qualcosa per mitigare l'impressione paradossale che desta questo approccio. In primo luogo le parole come coppia o terna denotano chiaramente una classe di classi. Pertanto ciò che dobbiamo dire è che ‘due uomini’ significa ‘prodotto logico di una classe di uomini e di una coppia’ e ‘ci sono due uomini’ significa ‘c'è una classe di uomini che è anche una coppia’. In secondo luogo, quando ricordiamo che un concetto-classe non è esso stesso un insieme, ma una proprietà con la quale è possibile definire un insieme, noi vediamo che, se definiamo il numero come il concetto-classe, non la classe, un numero si definisce effettivamente come una proprietà comune di una serie di classi simili e di nient'altro (Russell, 1971, pp. 195-6).

L'equipotenza fra classi è un concetto-classe, ovvero una proprietà caratteristica che permette di definire in maniera intensiva una classe, in quanto proprietà di cui godono tutti i suoi elementi. La sostituzione, accettata dalla matematica, di una proprietà comune a più classi (che sia però una relazione di equivalenza) con l'insieme di tali classi stesse può generare un certo scetticismo e sembrare paradossale. Bertrand Russell ha accuratamente analizzato la questione, concludendo:

Ogni volta che la matematica deriva una proprietà comune da una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva, tutti gli scopi matematici della proprietà supposta vengono pienamente raggiunti sostituendo ad essa la classe dei termini che hanno la relazione data con un dato termine; e questo è precisamente il caso presentato dai numeri cardinali (Russell, 1971, p.197).

In definitiva, l'identificazione dell'insieme di tutti gli insiemi simili fra loro con il concetto astratto di numero cardinale conferma l'idea di Bruno de Finetti della riduzione dell'astratto al multi concreto (de Finetti, 1974). L'astratto, così concepito, non è più una misteriosa proprietà, quasi metafisica, regalmente distaccata dal concreto da cui, pur derivandone, sembra prendere superbamente le distanze, bensì rimane ad esso intimamente legato pur differenziandosene: è l'astratto che condensa in sé una moltitudine di casi concreti, tutti comprendendoli. Senza il riferimento al concreto (o meglio al multiconcreto, ovvero al concreto nelle sue molteplici forme e nelle sue diverse relazioni operative) l'astratto è vuoto di significato:

È futile metafisicheria chiedersi ad esempio 'in che cosa consista' il 'concetto di numero', o 'del numero 2' considerato come 'entità' a sé. Allo stesso modo (salvo un po' d'esagerazione) che le lettere 'd, u, e' non hanno un significato di per sé ma lo assumono usandole per formare la parola 'due', così anche il 'due', o 2, non ha neppur esso veramente un significato compiuto così da solo, ma lo ha in quanto è un termine utile per esprimere concetti un po' più concreti, come 2 cani, 2 metri, 2 viaggi; ma anche tali espressioni sono significative solo se ed in quanto possono entrare in proposizioni di cui si sappia operativamente distinguere cosa s'intenda dicendole vere o false (p. es. per concludere se 'questo tavolo è lungo meno di 2 metri' è vera o falsa). Così $2+3=5$ è un modo sintetico e di per sé vuoto di esprimere il fatto che, in condizioni da precisare operativamente come sopra, ciò vale per cani, metri, viaggi (de Finetti, 1966, p.10361).

5 – La definizione matematica per classi della temperatura

5.1 – Atipicità della temperatura come grandezza fisica

Come è noto, una grandezza fisica è tale se per essa si possono stabilire inequivocabilmente una unità di misura e un criterio di uguaglianza e somma (e differenza) in modo da poter definire una procedura di misura.

La temperatura, pur essendo accettata come grandezza fisica, in realtà non possiede completamente tali requisiti (Caldirola, 1956, p.55, nota1; Perucca, 1937, p. 538; Bordoni, 1970, pp.173,174). Infatti, non è possibile definire una unità di misura della temperatura bensì soltanto una unità di misura dell'intervallo di temperatura, analogamente a quanto accade per il tempo. Inoltre non gode della proprietà additiva. Mentre, per esempio, fissata l'unità di lunghezza è possibile "costruire" qualunque altra lunghezza allineando un sufficiente numero di volte la lunghezza unitaria e i suoi sottomultipli, ciò invece non accade con la temperatura: non è possibile, con lo stesso metodo additivo, realizzare per esempio una temperatura tripla dell'unità di temperatura perché, se si mettessero a contatto tre corpi con temperatura unitaria, per il principio dell'equilibrio termico (o principio zero della termodinamica) il corpo risultante dalla loro unione avrebbe ancora temperatura unitaria. Per tali ragioni non è possibile stabilire un numero discreto di multipli e sottomultipli della temperatura che ne consentano una misura relativa come per le altre grandezze, bensì è necessario fissare "ogni suo multiplo e sottomultiplo" stabilendo arbitrariamente una scala numerica delle temperature e uno zero, ovvero un punto di riferimento reso necessario del fatto che si possono considerare sol-

tanto intervalli di temperatura. Queste sue caratteristiche, che ne fanno una grandezza fisica atipica, sono dovute al fatto che non è possibile accedere direttamente alla temperatura per misurarla, bensì occorre considerare i suoi effetti su qualche altra grandezza fisica, come accade nei comuni termometri a mercurio, che danno una misura della temperatura attraverso la dilatazione subita dal mercurio in un tubicino di vetro.

Più che una vera grandezza fisica, dunque, la temperatura deve essere considerata un indice dello stato termico di un corpo, cioè di quel suo particolare stato che noi percepiamo con le sensazioni di caldo e freddo: «Si chiama temperatura una grandezza fisica che misura quanto un corpo è caldo o freddo», dice Enrico Fermi (1944, p. 141). Ma è chiaro che definizioni come questa sono in realtà pseudo-definizioni, utili soltanto per focalizzare il significato fisico intuitivo della temperatura, come quest'altra:

... la temperatura d'un corpo è quello stato suo particolare pel quale, essendo esso posto a contatto degli altri corpi, può cedere loro calore o riceverne (Castelfranchi, 1943, p. 421).

Considerata la natura particolare della temperatura, grandezza fisica sotto certi aspetti anomala rispetto ai requisiti tipici delle grandezze fisiche, si propone per essa una definizione per classi da completare con una definizione operativa, peraltro già nota. In tal guisa la temperatura acquista una sua caratterizzazione matematica che la accomuna a un'altra grandezza fisica fondamentale, la lunghezza, anch'essa definibile per classi prima ancora che operativamente come vuole la fisica.

5.2 - Definizione matematica della temperatura

In (Nicotra, 2020) sono stati ampiamente illustrati i concetti di *sistema*, *stato termodinamico* di un sistema, *stato termodinamico di equilibrio* e di *stati in equilibrio termico*, potendo asserire che la relazione di equilibrio termico Et (di uno stesso sistema o di sistemi diversi), godendo delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, è una relazione di equivalenza.

Allora applicando Et all'insieme S di tutti i possibili stati di equilibrio termico, risulta definita una partizione Θ di S in classi di equivalenza θ_i ($i \in I, I = \{1, 2, \dots, n\}$) ciascuna delle quali è costituita da stati in equilibrio termico, pervenendo all'insieme quoziente $\Theta = S/Et$. Ogni classe θ_i di equivalenza di tale insieme è “una temperatura”, mentre l’insieme quoziente Θ è l’insieme di tutte le temperature e quindi definisce il “concetto generale di temperatura”. Ne segue che tutti gli stati che sono in equilibrio termico appartengono a una medesima classe θ_i di Θ e quindi hanno la medesima temperatura e viceversa se due stati hanno la stessa temperatura appartengono alla stessa classe θ_i di Θ e quindi sono in equilibrio termico. Il principio di contrazione, o passaggio al quoziente, consente dunque di formulare la seguente definizione: *una temperatura è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equilibrio termico fra gli stati termodinamici di uno stesso sistema o di sistemi diversi* (Nicotra, 2020). O più sinteticamente: *una temperatura è una classe di stati termodinamici (di uno stesso sistema o di sistemi diversi) in equilibrio termico*.

Il passaggio al quoziente, mediante il quale si è fornita la precedente definizione esplicita per classi della temperatura, istituisce tra l'insieme S di tutti i possibili stati termodinamici di un sistema (o di sistemi diversi) e l'insieme Θ delle classi di stati in equilibrio termico una mappa univoca di S in Θ :

$$f : S \rightarrow \Theta \text{ ovvero } \theta = \theta(s)$$

la quale associa a ogni stato termodinamico $s \in S$ una e una sola classe $\theta \in \Theta$ di stati in equilibrio termico con s , ovvero una e una sola temperatura, in accordo con quanto desiderato per la temperatura come “grandezza-indice” dello stato termodinamico di un sistema.

6 – Obiezioni sul concetto-classe a favore della classe-concetto

Il passaggio da un insieme A all'insieme quoziente A/ε (essendo ε una relazione di equivalenza) schematizza e precisa matematicamente il processo di formazione dei concetti a partire da oggetti, e più in generale, l'ordinario processo di astrazione, consistente nell'identificazione di elementi diversi, sì, ma godenti tutti di una comune proprietà. Si tratta, infatti, di considerare classi di elementi (di A) come elementi (di un nuovo insieme, A/ε); gli elementi di A possono essere riguardati come (oggetti) dati, gli elementi di A/ε come “astrazioni concettuali” (classi di oggetti pensate come un unico oggetto). (Lombardo Radice, 1965, p. 27)

Come già accennato precedentemente a proposito della definizione di numero naturale, può generare un certo scetticismo, e sembrare paradossale, la sostituzione di una proprietà comune a più elementi con la classe di tali elementi, accettata dalla matematica. Nel caso della definizione di numero naturale (cardinale) come classe di classi equipotenti si è già riportata l'osservazione di Russell a tali obiezioni (cfr. n.4 p. 25).

La questione, però, è stata analizzata e affrontata da Russell in termini più generali, ovvero per qualunque definizione per classi. A tale scopo, osserviamo che il passaggio al quoziente, che negli esempi precedenti è stato utilizzato per ottenere defini-

zioni per classi, può condurre in realtà a due tipi di definizioni: implicite per astrazione ed esplicite per classi.

Nelle definizioni implicite per astrazione l'ente viene definito come quell'ente "astratto" che gode della proprietà comune agli elementi di una classe di equivalenza (relazione di equivalenza). In tal caso esso viene definito come concetto-classe.

Nelle definizioni esplicite per classi, invece, l'ente viene definito come classe di equivalenza dell'insieme quoziente. In tal caso viene definito come classe-concetto.¹⁰

Le definizioni implicite però, come è noto, non precisano la natura dell'ente che definiscono e, secondo alcuni autori, quelle implicite per astrazione che fanno uso di una relazione di equivalenza r non ne assicurano nemmeno l'unicità, in quanto r caratterizza non soltanto la proprietà o funzione $\phi(x)$ che si vuol definire ma anche ogni altra funzione di questa $f[\phi(x)]$.¹¹

Quest'ultima critica è stata posta da molti eminenti matematici e logici e soprattutto da Bertrand Russell e Alfred North Whitehead, sostenitori della sostituzione delle definizioni implicite per astrazione con definizioni esplicite per classi.

¹⁰ Di questa denominazione, duale di concetto-classe di Russell, sono debitore al prof. Franco Eugeni durante una chiacchierata telefonica.

¹¹ Per esempio, la relazione di equivalenza $\phi(a,b) = \phi(a',b') \Leftrightarrow ab' = a'b$ ($bb' \neq 0$) che dovrebbe definire il concetto di frazione per astrazione non lo definisce in quanto la medesima relazione vale per la radice n -esima di un numero frazionario $\sqrt[n]{a/b}$. Così anche la relazione di congruenza fra segmenti che dovrebbe caratterizzare la lunghezza del segmento caratterizza anche l'area del quadrato e il volume dello stesso segmento. Tuttavia, come osserva Giulio Platone, essendo noto l'insieme G al quale viene applicata la relazione di equivalenza R è chiaro che R (e quindi la proprietà o predicato che R esprime) si debba intendere valida soltanto per gli elementi dell'insieme G (Platone, 1969, p. 175).

Per esempio, a proposito della definizione per astrazione di numero cardinale, così si esprime Bertrand Russell (1971, p. 194):

Questa definizione per astrazione, e generalmente il processo impiegato in tali definizioni, soffre di un difetto formale assolutamente fatale: non dimostra che è solo un oggetto a soddisfare alla definizione. Pertanto invece di ottenere una proprietà comune di classi simili, che è il numero delle classi in questione, noi otteniamo una classe di tali proprietà, senza possibilità alcuna di sapere quanti termini questa classe contiene. Per rendere ancora più chiaro questo punto, esaminiamo che cosa significa, nel caso presente, una proprietà comune. Ciò che si intende dire è che ogni classe ha con una certa entità, il suo numero, una relazione che non ha con alcun'altra, ma che tutte le classi simili (e non altre entità) hanno con lo stesso numero. Esiste cioè una relazione molti-uno che ogni classe ha con il proprio numero e con nient'altro. Quindi, nella misura in cui si ammette la definizione per astrazione, qualsiasi serie di entità, con ognuna delle quali qualche classe ha una certa relazione molti-uno, e con una e solo una delle quali una classe data ha questa relazione, e che sono tali che tutte le classi simili ad una classe data hanno questa relazione con l'unica e medesima entità della serie, ci si presenta come la serie dei numeri, ed ogni entità di questa serie è il numero di una certa classe. Se allora esistono molte di queste serie di entità - ed è facile dimostrare che ne esiste un numero infinito - ogni classe avrà molti numeri, e la definizione avrà totalmente fallito il suo compito di definire il numero di una classe. Questo ragionamento è del tutto generale, e mostra come la definizione per astrazione non è mai un processo logicamente valido.

Bibliografia

ALES BELLO Angela (2025). *Husserl e le scienze*. Roma: Inriga edizioni.

ALIOTTA Antonio (1930)., *Il problema estetico e didattica dell'arte*. Napoli: Francesco Perrella.

BORDONI Ugo (1970). *Fondamenti di Fisica Tecnica*, vol. 1. Bologna: Zanichelli.

CALDIROLA Piero (1956). *Elementi di Fisica*, vol.II. Milano: Ghisetti&Corvi.

CASTELFRANCHI Gaetano (1943). *Fisica sperimentale e applicata*, vol. I. Milano: Hoepli.

DE FINETTI Bruno (1966). "Sull'insegnamento della matematica", in «*Homo Faber*», anno XVII, n. 164, 1966.

DE FINETTI Bruno (1974). "Interventi al Convegno della C.I.I.M, Viareggio 24-26 ottobre 1974", in «*Notiziario del Bollettino della Unione Matematica*», dicembre 1974.

FERMI Enrico (1944). *Fisica*, vol. I. Bologna: Zanichelli.

FRAJESE Attilio (1968). *Introduzione elementare alla matematica moderna*. Firenze: Le Monnier.

LOMBARDO RADICE Lucio (1965). *Istituzioni di algebra astratta*. Roma: Feltrinelli.

NICOTRA Luca (2013). "L'interferenza delle associazioni e il concetto di numero". In «*Il Contributo*», Rivista quadrimestrale del Centro per la Filosofia Italiana, Anno XXXV, IV n.s., gennaio/agosto 2013 – N. 1-2.

NICOTRA Luca (2020). "Definizione per classi della temperatura". In «*Periodico di Matematica*» (IV) Vol. II (1) pp. 25-52.

VILLA Mario (cur.) (1963). *Per un insegnamento moderno della matematica*. Bologna, Patron. Testo per le classi pilota in matematica curato dalla Direzione Generale dell'Istruzione Classica OCSE del Ministero della Pubblica Istruzione.

PERUCCA Eligio (1937). *Fisica generale e sperimentale*, vol. I. Torino: UTET.

PLATONE Giulio (1969). "La definizione nel contesto linguistico e scientifico" (I parte). In «*Archimede*» Anno XXI n. 3, pp. 113-128; (II parte), in «*Archimede*» Anno XXI n. 4-5, pp. 172-183.

PLATONE Giulio (1970). La definizione nel contesto linguistico e scientifico (III parte). In «*Archimede*» Anno XXII n. 3-4, pp. 121-138.

RUSSELL Bertrand (1970). *Introduzione alla filosofia matematica*. Roma: Newton Compton.

RUSSELL Bertrand (1971). *I principi della matematica*. Roma: Newton Compton.

L'esplorazione del moto: una continua sorpresa

Bonaventura Paolillo*

*Docente di Matematica e Fisica al Liceo Scientifico Severi di Salerno;
Tutor Coordinatore A027, (2023-2024)-Università degli Studi di Salerno
bonaventura.paolillo@liceoseverisalerno.net



DOI: 10.53159/PdM(IV).v7n3.161

Sunto: *Il calcolo differenziale e integrale, insegnato nelle scuole superiori, si sviluppa sul concetto di funzione reale. Però gli strumenti di calcolo non vengono utilizzati spesso in altre aree, come per esempio in Cinematica. È necessario realizzare attività laboratoriali che forniscano una significativa consapevolezza nella crescita di queste competenze. La descrizione del moto, in questa sede, sarà elaborata in contesti reali, utilizzando risultati come il Teorema degli Zeri, che ha carattere di continuità, e i Teoremi di Lagrange, Rolle e Cauchy, che hanno carattere di differenziabilità. Verrà considerato anche l'integrale definito, dal punto di vista cinematico.*

Parole Chiave: Moto, Cinematica, Calcolo.

Abstract: *Differential and integral calculus, taught in high schools, develops on the concept of real function. However, calculation tools are not often used in other areas, such as in Kinematics. It is necessary to carry out laboratory activities that provide significant awareness in the growth of these skills. The description of motion here will be elaborated in real contexts, using results such as the Theorem of Zeros, which has a continuity character, and the Lagrange, Rolle and Cauchy Theorems, which have a differentiability character. The definite integral will also be considered, from the kinematic point of view.*

Keywords: *Motion, Kinematics, Calculus.*

1 -Introduzione

È noto comunemente a docenti e allievi che il calcolo differenziale e integrale insegnato in scuole secondarie di secondo grado tende a focalizzarsi sull'elaborazione del concetto di funzione e su questioni prettamente numeriche. In effetti, si affrontano diverse proprietà collegate alla continuità e derivabilità di ampie classi di funzioni, dalle polinomiali alle esponenziali, dalle logaritmiche alle trascendenti, ecc., per esaminarne le loro caratteristiche e peculiarità, onde tracciarne il grafico e valutarne l'andamento. Del calcolo differenziale e integrale, sebbene vengano fornite alcune applicazioni in cinematica, questa, così come la meccanica, non riesce ad avvalersi concretamente degli stessi e utili strumenti concettuali. Questo lavoro intende orientarsi in questa direzione, illustrando una serie di esperienze didattiche, realizzate con gli allievi del Liceo Scientifico "Francesco Severi" di Salerno e non solamente relative alle classi terminali. Esso è stato presentato ad Agerola 2024 al IV Convegno *"Matematica Natura e Scienza dell'Alta Costiera Amalfitana-Itinerari interdisciplinari sui sentieri della matematica"*.

Nella realizzazione di queste attività laboratoriali i nuclei centrali della didattica sono stati concentrati su fondamentali risultati dell'*Analisi*, come il Teorema degli Zeri, che riveste un carattere di continuità, i Teoremi di Lagrange, Rolle e Cauchy, che hanno un carattere di differenziabilità e sul significato del calcolo di un integrale definito, per il quale il teorema fondamentale può offrire una giustificazione cinematica.

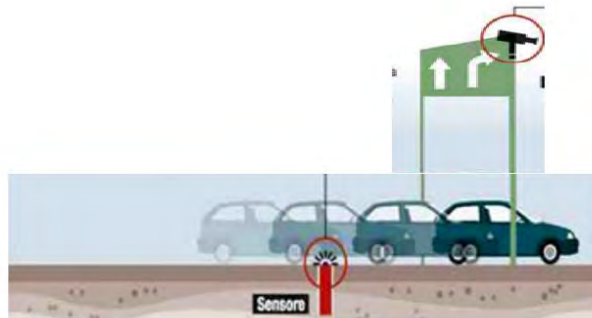
L'obiettivo è di rafforzare una maggiore consapevolezza nella sorprendente e sempre viva interazione esistente tra Matematica e Fisica. Si riscopre allora che la stessa esplorazione del moto, caposaldo storico nello sviluppo della scienza, non cessa di svelare il suo fascino fecondo.

2 – La matematica in autostrada e il teorema di Lagrange

Tra i primi concetti della cinematica ad essere discusso e trattato c'è quello della velocità. Lungi dall'essere una grandezza ovvia, in tutti i suoi aspetti, è nella fase del biennio della scuola secondaria di secondo grado che appare prevalentemente, sebbene possa essere stata incontrata negli studi precedenti.

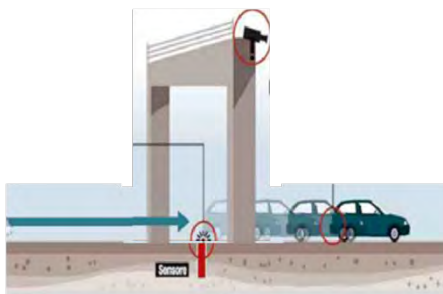
Non si tratteranno i relativi collegamenti con gli aspetti storici, seppur interessanti, legati ad alcune figure notevoli quali Aristotele, Buridano, Tartaglia e soprattutto Galilei che ne definisce il significato attuale. In queste fasi introduttive, gli allievi sono soliti manifestare la loro curiosità ed interesse su tale grandezza ed anche sulla distinzione che si opera tra i due casi: velocità media e istantanea. Quest'ultima è infatti definita intuitivamente, come operazione di passaggio al limite, con intervalli di tempo sempre più piccoli, in simboli $\Delta t \rightarrow 0$.

Descriviamo, in questa sede, un'interessante applicazione cinematica che ricorre spesso nella vita quotidiana e utilizza un importante risultato dell'Analisi Matematica. In diversi tratti di autostrada nazionale si osservano facilmente impianti che coinvolgono i sistemi tutor. Per esempio, in figura, si nota



uno di questi Sistemi che rivela il tempo in cui transita un'auto.

Supponiamo che l'auto al passaggio della barriera, dotata di sensori, abbia una velocità istantanea di 100 km/h . Successivamente, un altro sistema tutor rivela il secondo transito dell'auto, che supponiamo essere ancora di 100 km/h .



Considerando che il limite massimo è di 130 km/h , possiamo essere sicuri di non essere stati multati?

La richiesta è comprendere se esiste un momento in cui la velocità istantanea coincide con la velocità media. Se la funzione è derivabile, il Teorema di Lagrange ci assicura che esiste sempre un tale istante, non necessariamente unico.

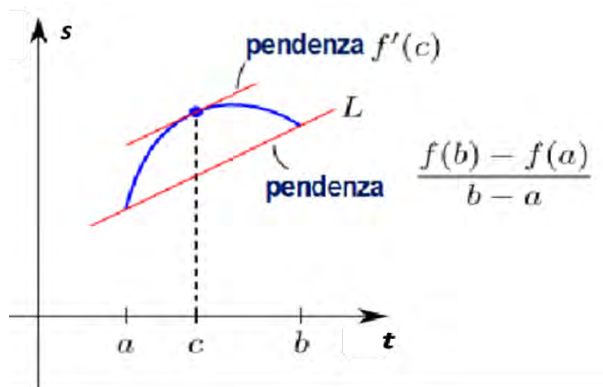
Nel nostro esempio immaginiamo che il tratto tra le barriere abbia una lunghezza di 24 km e che venga percorso in

10 minuti, cioè $(1/6)h$.

Nel nostro esempio immaginiamo che il tratto tra le barriere abbia una lunghezza di 24 km e che venga percorso in 10 minuti, cioè $(1/6)h$. Si avrebbe:

$$v_m = \frac{24 \text{ km}}{\left(\frac{1}{6}\right)h} = 144 \text{ km/h}$$

In figura viene indicata la legge oraria $\text{conf}(t)$, mentre $b-a = (1/6)h$ e $f(b)-f(a) = 24\text{km}$. L'istante c è il fatidico momento in cui siamo sicuri che scatta la multa, $v_i(c) = v_m$.



Sebbene il teorema costituisca un importante ponte tra i concetti di velocità media ed istantanea, non abbiamo nessun modo di determinare dove sia stata commessa l'infrazione, a meno che non si disponga di numerosi autovelox lungo la carreggiata di riferimento.

3 – Passeggiate e incontri inevitabili

Il seguente quesito è tratto da (Gardner, 1979, p. 215) e viene qui liberamente adattato.

Martin Gardner è stato il più importante e prolifico scrittore di matematica ricreativa di ogni epoca. Nato nel 1914 in Oklahoma, dal 1956 al 1981 ha curato, per il mensile «*Scientific American*», una rubrica di enigmi e giochi matematici, divenuta popolare in tutto il mondo. In Italia è riproposta su «*Le Scienze*».

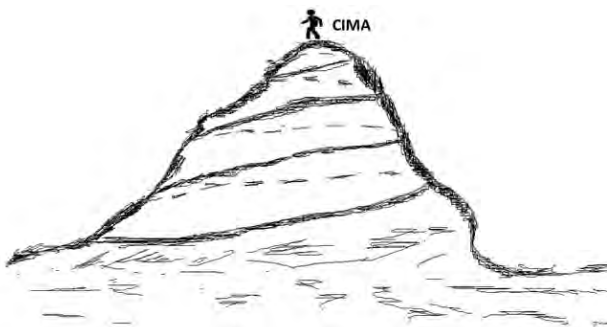
La passeggiata del turista

Un turista effettua un'escursione montana percorrendo un unico sentiero. Proceda partendo a valle, alle ore 7:00 e giungendo in cima alle ore 19:00. Dopo aver riposato durante la notte, riparte il giorno seguente alle ore 7:00 dalla cima, percorrendo lo stesso sentiero e terminando a valle il suo tragitto alle ore 19:00. Nei due giorni, sosta diverse volte a piacimento, e con durata variabile. Ci si chiede se nei due giorni esiste un punto del sentiero in cui il turista è passato nello stesso istante?

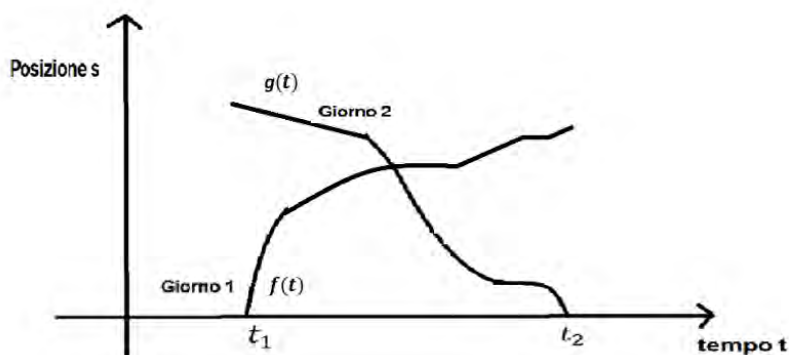
Il percorso del primo giorno



Il percorso del secondo giorno



Il moto unidimensionale del turista è descritto con un naturale sistema di riferimento, con origine O nel punto di valle, e con ascissa curvilinea s che indica la posizione del turista in funzione del tempo t . Si ipotizza la continuità della grandezza tempo, che è comunemente accettata. Si possono evidentemente rappresentare i relativi diagrammi orari dei due giorni, come in figura.



Sull'asse verticale sono indicate le posizioni e su quello orizzontale le misure dei tempi, mentre gli istanti di tempo di partenza e arrivo sono t_1 e t_2 , coincidenti nei due giorni. Si

assumono che le due leggi orarie del turista $f(t)$ e $g(t)$, siano funzioni continue. La soluzione è ottenuta allora come punto d'intersezione tra i due grafici; utilizzando il teorema degli zeri risulta che:

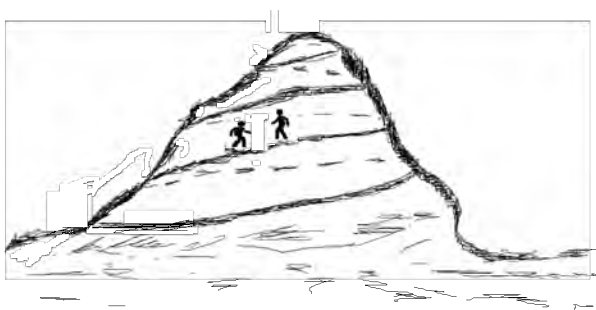
$$f(t_1) - g(t_1) < 0 ; f(t_2) - g(t_2) > 0$$

ed esisterà certamente un istante t in cui:

$$f(t) - g(t) = 0.$$

Una diversa soluzione tanto inaspettata quanto brillante è la seguente: si immagini un unico giorno ideale ed un turista con il suo gemello, che procedono simultaneamente sullo stesso sentiero. Uno è posto a valle e l'altro si trova in cima e si muovono in versi opposti. Evidentemente durante il percorso non potranno che incontrarsi ed in tale punto risponderanno, in maniera naturale, alla richiesta del quesito.





Secondo Gardner, tale soluzione deriverebbe dalla scuola psicologica Gestalt e dal suo carattere creativo. La Gestalt è una corrente psicologica che si sviluppò in Germania, dall'inizio del '900. Studiò principalmente la percezione delle forme e l'esperienza; tra i tanti esempi il triangolo di Kanizsa, l'illusione di Ponzo, il Vaso e i due profili ecc. K. Wertheimer (1945) descrisse il pensiero come da ritenersi creativo e produttivo in quanto, posto di fronte a una situazione problematica, può trovare soluzioni attraverso un processo di ristrutturazione e riorganizzazione globale della situazione stessa, di tutti i suoi elementi e dei loro significati funzionali e relazioni reciproche, detto "ricentrimento". Studi e sviluppi sul ruolo delle immagini mentali e sulle strategie metacognitive nella risoluzione dei problemi, in ambito matematico, risultano d'interesse e sempre attuali. Si veda per esempio George Polya (1970) su questo e su come avvenga la scoperta in matematica. Si segnalano anche i lavori di (Paolillo, 2022; Polekhin, 2015).

È rilevante che la soluzione data dalla Gestalt non presuppone la conoscenza del teorema degli zeri. Se si conduce un monitoraggio delle risposte degli allievi, con le inevitabili difficoltà che si riscontrano, si evince che essi tentano di localizzare effettivamente la posizione del punto

d'incontro. Sono orientati ad affermare che probabilmente si trova nel punto medio del sentiero. Qualcuno tra gli allievi ha anche proposto di realizzare un filmato video per il percorso d'andata e uno per quello di ritorno, con un confronto a posteriori dei fotogrammi del percorso. Si tende a trascurare, per diversi motivi, la richiesta iniziale che è prettamente esistenziale e non deterministica. Infatti, ci si chiede di capire se tale punto esiste e non dove sia collocato fisicamente.

3.1 – Incontrarsi con le auto e salutarsi

La situazione appare più chiara se la si espone in maniera quasi equivalente. Si provi a fornire ad un secondo gruppo di allievi, in maniera indipendente da quello precedente, la seguente richiesta:

Incontro tra auto

Due auto procedono in versi opposti sul tratto Salerno-Napoli (A3). Un'auto parte da Salerno e l'altra da Napoli, muovendosi con velocità qualsiasi ma con orari coincidenti per la partenza e l'arrivo delle due auto. Ci sarà un punto comune in cui gli autisti, procedendo nelle due carreggiate, riusciranno a salutarsi?

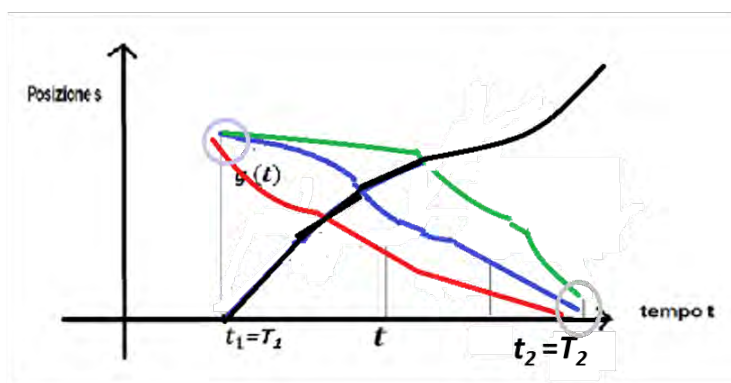


Assumiamo che il “punto comune” si possa idealmente identificare con la linea di collegamento perpendicolare tra le

due auto, quando si incontrano. Si possono anche considerare per le auto delle soste presso distributori o autogrill.

In questa variante, la risposta è resa più semplice, contestualizzandola in una situazione familiare, cioè nell'incontro di due automobili su un'autostrada. La difficoltà di individuare un "giorno ideale" in cui avanzano i punti mobili, che siano turisti o auto, è infatti sparita. Ciò sta ad attestare l'importanza di elaborare, tanto nella ricerca quanto nella didattica, dei possibili modelli di risoluzione esemplificativi ed efficaci.

Se si suppone di fissare costantemente il tragitto della prima auto e di far viaggiare più auto nel verso opposto alla prima, (per esempio un'auto verde, blu e rossa su corsie parallele) i punti ed i tempi in cui si incontreranno risulteranno differenti. Ciò a riprova ulteriore della validità del teorema degli zeri e della sua reinterpretazione cinematica.



La questione dell'incontro tra le due auto si può ancora estendere. Rispetto ad un orologio comune, detti t_e e t_f i tempi in cui l'auto 1 parte da A ed arriva in B e T_i e T_f i tempi in cui l'auto 2 parte da B ed arriva in A, perché ci sia un effettivo

incontro in un istante t' deve risultare (con esclusione dei punti terminali):

$$t_i < t' < t_f \quad \text{e} \quad T_i < t' < T_f, \quad \text{da cui segue } t_i < T_f \quad \text{e} \quad T_i < t_f$$

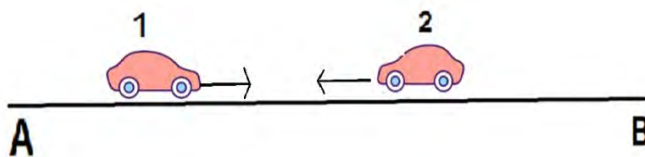
Nota.

Le formulazioni dei due quesiti precedenti si possono esprimere in maniera equivalente affermando che si sta ricercando l'esistenza di un istante di tempo, in cui le auto o i turisti, si incontrano in uno stesso punto.

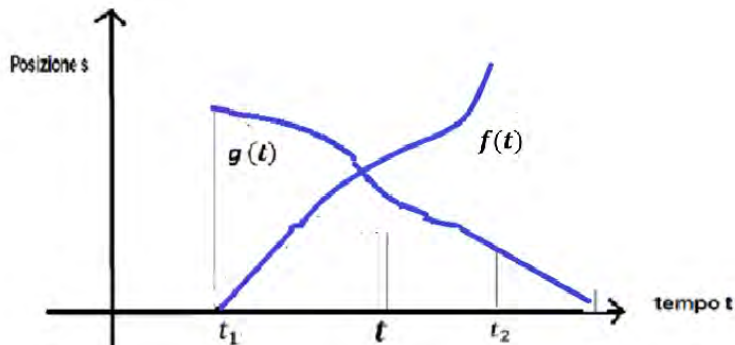
3.2 – Il secondo quesito sulla passeggiata di Gardner

Ciò che Gardner non si è chiesto è se dati due mobili, come in precedenza, può valere la coincidenza delle lancette dei tachimetri, almeno in qualche istante comune. In modo più esplicito si vorrebbe rispondere alla seguente richiesta:

Due auto procedono in versi opposti su un tratto rettilineo dalla città A alla città B. Partono e arrivano entrambe contemporaneamente. Esiste un istante di tempo in cui le auto avranno in modulo lo stesso valore della velocità?



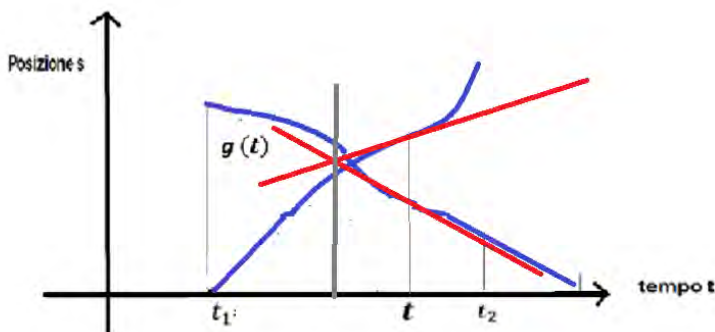
Si può fissare, al solito, il sistema di riferimento nella città A, con semiasse positivo verso B, ottenendo i seguenti diagrammi orari:



Si ammette anche che le funzioni posizione f, g delle auto siano continue e derivabili. In termini geometrici, significa che si sta richiedendo l'esistenza di un istante t , tale che le rette tangenti (di colore rosso) alle due curve nei punti di ascissa t , siano simmetriche rispetto all'asse verticale che passa per il loro punto d'intersezione.

Utilizziamo il Teorema di Rolle per rispondere al secondo quesito di Gardner. Si consideri la somma tra le due funzioni posizione $f(t) + g(t)$. Evidentemente vale:

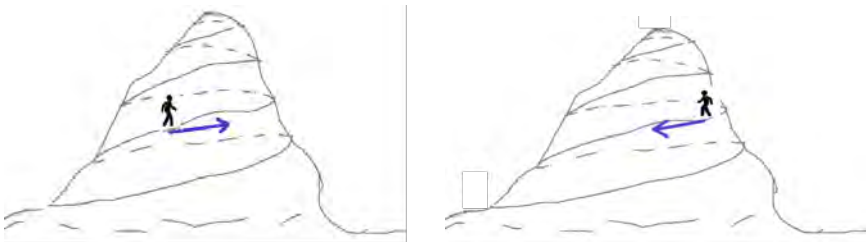
$$f(t_2) + g(t_2) = L + 0 = L ; f(t_1) + g(t_1) = 0 + L = L.$$



La funzione somma è anch'essa continua e derivabile ed essendo verificate le condizioni espresse dal teorema esisterà un istante t tale che: $f'(t) + g'(t) = 0$, da cui:

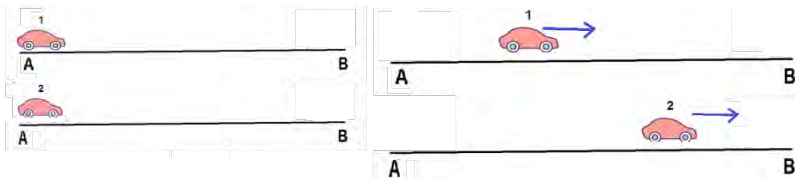
$$f'(t) = -g'(t)$$

Per questo istante t le due auto assumeranno, in modulo, la stessa velocità. Se si vuole effettuare un'analisi analoga per la passeggiata del turista, bisogna ipotizzare preliminarmente che non esistano punti spigolosi. Infatti, essendoci un percorso curvilineo, si deve ammettere che in ogni punto del percorso si possa tracciare la retta tangente e cioè che il vettore velocità sia determinato. La richiesta è comprendere, se esiste un istante, nei due giorni, in cui il turista misura in modulo la stessa velocità. La prova che ciò esista è basata sulla dimostrazione appena esaminata.



4 - Gare olimpioniche esaminate col calcolo

Percorsi paralleli e velocità comuni Due auto procedono nello stesso verso posizione f, g delle due auto siano entrambe continue e derivabili).



Si osserva come per ciascuna legge oraria il teorema di Lagrange non riesce a rispondere. Dal calcolo in basso, gli istanti t^* , t^{**} che verificano il teorema potrebbero essere diversi tra loro, essendo le funzioni f , g in genere diverse:

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}=f'(t^*) ; \frac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}=g'(t^{**})$$

Su tale ultima questione, la gara dei 100m piani delle Olimpiadi 2024, ha offerto una situazione vicina al nostro contesto. Lo statunitense N. Lyles e il giamaicano K. Thompson hanno terminato la gara con il tempo di 9,79 s, per la precisione Lyles ha realizzato 9,784 s e Thompson 9,789 s. Per i nostri scopi possiamo ipotizzare coincidenti i due tempi di arrivo e pervenire ad alcune considerazioni.

Uniformando le misure delle grandezze con il noto S.I., e quindi con velocità espresse in $\left(\frac{m}{s}\right)$, si otterrà:

$$\frac{f(9,79) - f(0)}{9,79 - 0} = \frac{100}{9,79} = 10,21$$



Esisterà allora un istante t^* in cui la velocità del vincitore è $f'(t^*) = 10,21$.

Così per il secondo classificato varrà lo stesso rapporto:

$$\frac{g(9,79) - g(0)}{9,79 - 0} = \frac{100}{9,79} = 10,21$$

ed esisterà un valore t^{**} con $g'(t^{**}) = 10,21$.

In generale tali istanti non sono coincidenti, potrebbero essere differenti pur verificandosi per gli atleti una comune velocità media di 10,21. Applicando opportunamente il teorema di Rolle si perviene ad ottenere un valore di t , con stessa velocità istantanea per entrambi i corridori e tale velocità istantanea non coinciderà generalmente con quella di 10,21.

Consideriamo allora la differenza tra le funzioni posizione f, g relativi ai primi due atleti:

$$f(t) - g(t)$$

Evidentemente vale:

$$f(t_2) - g(t_2) = 0 \quad \text{e} \quad f(t_1) - g(t_1) = 0$$

Le funzioni f, g sono entrambe continue e derivabili e così lo è la relativa differenza che rispetta le ipotesi del Teorema di Rolle. Esisterà allora un istante t tale che:

$$f'(t) - g'(t) = 0,$$

da cui la tesi, cioè i due velocisti avranno in t lo stesso modulo della velocità istantanea.

4.1 -La risoluzione secondo il teorema di Cauchy

Si può rispondere al quesito olimpionico precedente applicando il classico teorema di Cauchy del Calcolo Differenziale. Si nota preliminarmente che i velocisti non assumono velocità nulla durante il tragitto, cioè che le ipotesi di detto teorema sono verificate. Si ha:

$$f(t_2) - f(0) = L - 0 = L$$

$$g(t_2) - g(0) = L - 0 = L$$

$$\frac{f(t_2) - f(0)}{g(t_2) - g(0)} = \frac{L}{L} = 1$$

da cui:

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} = 1$$

cioè $f'(t) = g'(t)$. Esisterà allora un valore t per il quale le due velocità istantanee saranno coincidenti in modulo.

4.2 – Correndo per le siepi



Due maratonete corrono la gara dei 300 m siepi. Partono allo Start ($t_1=0$ s), da ferme e dopo un po' di giri, a distanza L , cadono entrambe inavvertitamente, restando ferme all'istante (t_2). Si chiede se avranno avuto, fino ad allora, in qualche istante, una velocità comune? Analogamente se avranno avuto un'accelerazione comune?

Ammettendo che le leggi orarie f, g siano continue e derivabili, assieme alle derivate f', g' si verifica facilmente che:

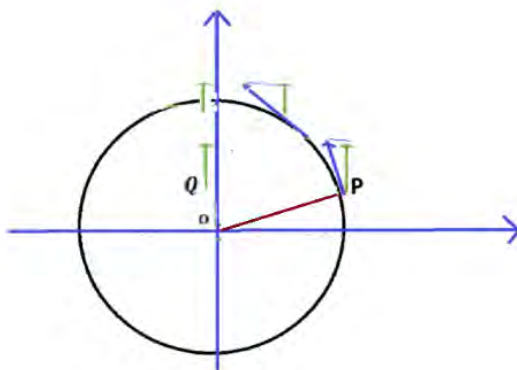
$$f(t_1) = g(t_1) = 0; \quad f(t_2) = g(t_2) = L;$$

$$f'(t_i) = g'(t_i) = 0; i=1,2;$$

Applicando il Teorema di Rolle come in precedenza per le funzioni differenza $f(t) - g(t)$ e $f'(t) - g'(t)$ si perviene affermativamente alle tesi. In generale si avranno due istanti t' e t'' non coincidenti tra loro.

5 - Calcolare un integrale con la cinematica

Si consideri il moto circolare uniforme ed il corrispondente moto armonico che si ottiene dalla naturale proiezione del punto P sull'asse verticale. In questa situazione, si può stabilire un risultato di un certo interesse, che coinvolge il calcolo di un integrale definito.



Si considerino per semplicità i seguenti valori unitari delle grandezze in gioco, raggio $R = 1\text{m}$, velocità angolare $\omega = 1\text{ rad/s}$, velocità lineare $v = \omega R = 1\text{ m/s}$, con partenza nell'usuale origine degli archi.

Nel disegno i punti P e Q si spostano insieme, sulla circonferenza e sul diametro, (in senso antiorario e verso l'alto) nel tempo che vada 0 s a $(\pi/2)\text{ s}$.

In questo intervallo temporale P percorrerà l'arco di lunghezza $\pi/2$ e Q un segmento con lunghezza pari a 1.

Poiché $\cos t\, dt$ si può intendere come il piccolo spostamento ds , lungo il raggio verticale, il calcolo dell'integrale definito visto come somma di tanti segmenti ds , diventa immediato.

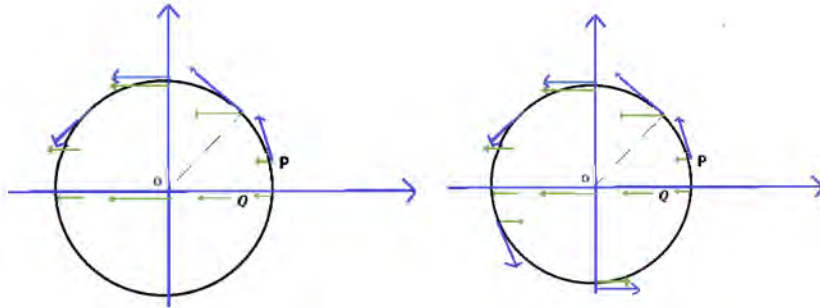
$$\int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = 1$$

Tale determinazione scaturisce da un fatto allora prettamente cinematico. Applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale, si otterrebbe lo stesso valore: $\sin(\pi/2) - \sin(0) = 1$.

Analogamente, si possono considerare integrali definiti come:

$$\int_0^{\pi} \sin t = 2;$$

$$\int_0^{3\pi/2} \sin t = 1$$



risolti per via cinematica. Tuttavia, non si deve intendere questo metodo da utilizzare in maniera universale, potendosi limitare solamente a questi esempi o a qualche nota funzione composta. A titolo di esempio, si consideri il moto circolare uniformemente accelerato con legge oraria $\alpha(t) = (1/2) t^2$ che avviene su una circonferenza di raggio unitario. Il relativo moto armonico che ne deriva sull'asse orizzontale, presenterà una velocità pari $av_x = v \sin \alpha(t)$ e di conseguenza $\int_0^m v_x dt = 1$, dove m viene determinata opportunamente come tempo di calcolo. Sviluppando, si otterrà per via cinematica, il seguente

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} t \sin\left(\frac{1}{2}t^2\right) = \left[-\cos\left(\frac{1}{2}t^2\right)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Ci si è riferiti alla rotazione di in quarto di giro, da cui è risultato $\alpha(m) = (1/2)m^2 = \pi/2$, con conseguente valore $m = \sqrt{\pi}$.

4 - Conclusioni

Il seguente lavoro ha l'auspicio di aver offerto una serie di attività laboratoriali da proporre proficuamente in un Liceo Scientifico o in istituti di scuola secondaria di secondo grado. I teoremi esaminati del Calcolo differenziale, come Rolle, Lagrange e Cauchy sono significativi da vari punti di vista, sia perché offrono condizioni sufficienti affinché si verifichino e sia perché sono di carattere esistenziale. Pongono quindi l'accento sulla natura stessa del contesto matematico, fatto spesso di implicazioni logiche in un solo verso e aiutano a far maturare nell'allievo l'importante distinzione concettuale tra l'esistenza di una soluzione e la sua effettiva determinazione. Tali attività didattiche, possono consentire una lettura più attenta del mondo reale, oltre a fornire utili strumenti nell'accrescimento dei livelli di competenza. Il presente articolo è stato ispirato da diverse fonti in letteratura. Oltre ad alcuni testi già citati in precedenza, come (Gardner, 1979), e per la scuola *Gestalt* (Anatriello, Vincenzi, 2016; Zudini, 2014), si menziona il classico e sempre attuale testo (Courant, Robbins, 2000) che ha fornito, per il teorema degli zeri, diversi sviluppi non usuali. In esso è discusso anche il problema meccanico di Whitney, abbastanza noto in letteratura, che ha ricevuto ampia discussione, del quale soltanto di recente sembra si sia trovata una soluzione adeguata, (Polekhin, 2015).

La risoluzione cinematica degli integrali, invece, si può evidenziare in vari autori, tra cui (Kuczmarski, 2011). Un ottimo testo in cui si illustra il ruolo degli esperimenti concettuali della fisica a supporto della matematica è (Levi, 2009). Si veda per questo anche (Paolillo, 2022; Polekhin, 2015).

Bibliografia

ANATRIELLO G., VINCENZI G. (2016). "Sono le basi cognitive della matematica geometriche?" In: «*Periodico di Matematiche*», Vol. 8 serie 12 n.3, p.41.

COURANT R., ROBBINS H. (2000). *Che cos'è la matematica?* Riedizione a cura di Ian Stewart. Torino: Bollati Boringhieri.

GARDNER Martin (1979). *Enigmi e giochi matematici*, vol 3, Firenze: Sansoni.

KUCZMARSKI F. (2011). "Roads and Wheels, Roulettes and Pedals". In: «*The American Mathematical Monthly*», 118(6), 479–496.

LEVI M. (2009). *The Mathematical Mechanic: using physical reasoning to solve problems*. Princeton: Univ. Press.

PAOLILLO B. (2007). "La mosca di Zenone". In: «*Lettera Matematica Pristem*» 61 pp. 60-64.

PAOLILLO B. (2022). "Gli esperimenti fisici come strumenti per l'indagine matematica". In: «*Periodico di Matematica*» (IV) Vol. IV (4) dicembre 2022, pp. 65-84.

POLEKHIN I. (2015). "An inverted pendulum with a moving pivot point: examples of topological approach". arXiv:1407.4787v4.

POLYA George (1970). *La scoperta matematica*. Voll. I e II. Milano : Feltrinelli.

WERTHEIMER Max (1945). *Productive thinking* . New York: Harper & brothers.

ZUDINI V. (2014). "La teoria della Gestalt. Figure, temi di interesse e prospettive per la didattica". In: «*Quaderni CIRD*» n. 9 pp. 34-52.

Misura della distanza di un oggetto astronomico con la fotografia

Giuseppe D'Angelo

Docente di materie scientifiche presso il Liceo Scientifico "Leonardo" di
Giarre - CT sitdang010762@mail.com



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v7n3.162

Sunto. *L'insegnamento dell'Astronomia, afferente al gruppo delle Scienze della Terra, pone sempre al docente il problema di quale approccio metodologico-didattico utilizzare. Un approccio che sia efficace in termini formativi e che sappia stimolare la curiosità e l'interesse del discente. Questo problema si manifesta soprattutto quando bisogna trattare argomenti che non prevedono un facile riscontro laboratoriale. Così è, ad esempio, la misura della distanza alla quale si trova un determinato corpo celeste dalla Terra. Sperimentare un metodo, prettamente didattico, che possa stimolare la curiosità e far passare anche qualche semplice concetto di Matematica e di Fisica può risultare davvero utile, didatticamente parlando. Queste finalità hanno suggerito di realizzare una attività sperimentale con alunni dell'ultimo anno di un liceo scientifico nella quale viene proposto un metodo per determinare la distanza di un oggetto astronomico utilizzando una pellicola fotografica con l'immagine dell'oggetto medesimo.*

Parole chiave: *Didattica dell'Astronomia; Dimensione angolare; Dimensione apparente.*

Abstract. *The teaching of Astronomy, pertaining to the Earth Sciences group, always presents the teacher with the problem of which methodological-didactic*

approach to use. An approach that is effective in training terms and capable of stimulating the learner's curiosity and interest. This problem manifests itself especially when it is necessary to deal with topics that do not require easy laboratory feedback. This is, for example, the measurement of the distance at which a given celestial body is from the Earth. Experimenting with a purely didactic method that can stimulate curiosity and convey even some simple concepts of Mathematics and Physics can be useful, educationally speaking. These purposes suggested carrying out an experimental activity with final year students of a scientific high school in which a method is proposed to determine the distance of an astronomical object using photographic film with an image of the object itself.

Key words: Astronomy Teaching; Angular size; Apparent size.

1 - Introduzione

In astronomia il diametro angolare (o dimensione angolare) di un oggetto è la misura del suo diametro rispetto alla distanza dall'osservatore. Esso corrisponde all'angolo che ha per tangente il rapporto: diametro/distanza, ovvero:

$$\delta = \arctan \frac{\text{diametro}}{\text{distanza}}.$$

La formula si basa su uno dei teoremi dei triangoli rettangoli che dice: in un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo. In questo enunciato compare la nozione trigonometrica di tangente di un angolo (PQ nel disegno sotto riportato) intesa come rapporto tra seno e coseno (diametro e distanza nel nostro caso).

Si osservi infatti che i due triangoli OPQ e OHM sono in proporzione ovvero:

$$(1) \frac{PQ}{OQ} = \frac{HM}{OM}$$

Inoltre, $HM = \text{sen}\gamma$, $OM = \text{cos}\gamma$, $OQ =$ raggio circonferenza goniometrica ($x^2 + y^2 = 1$) e quindi $= 1$.

Pertanto, la (1) diventa:

$$\frac{\text{tan}\gamma}{1} = \frac{\text{sen}\gamma}{\text{cos}\gamma}$$

ovvero

$$(1a) \text{tan}\gamma = \frac{\text{sen}\gamma}{\text{cos}\gamma}$$

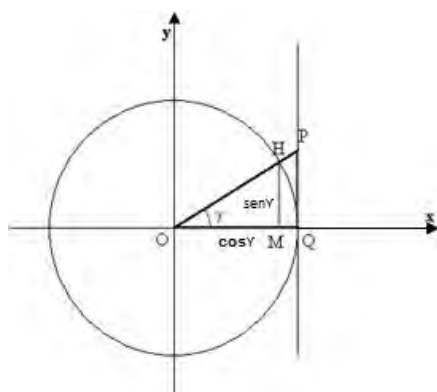


Fig. 1 - Elementi trigonometrici

La dimensione angolare di un corpo celeste è possibile conoscerla se si conosce il diametro del corpo e la distanza alla quale esso si trova. Di nuovo ci vengono in aiuto i triangoli rettangoli e la circonferenza goniometrica. Per determinare quindi il diametro di un qualsiasi corpo celeste ($\text{sen}Y$ di Fig. 1) una volta conosciuta la distanza ($\text{cos}Y$ di Fig.1) e la dimensione angolare è sufficiente moltiplicare la distanza medesima per la tangente del diametro angolare. Nel caso del Sole (vedi tab. 1) avremo: dimensione angolare media $= 1930'' = 0,5361111^\circ$ ($1930/3600$), distanza $= 149.600.000$ Km.

Quindi $\text{Diametro} = 149.600.000 \text{ Km} * \tan 0,5361111 = 1399833,7 \text{ Km}$. Cioè, un raggio di circa 700000 Km, come è noto.

	min.	max
Sole	1889" (31' 29")	1953" (32' 33")
Luna	1796" (29' 56")	2009" (33' 29")
Mercurio	4,5"	13"
Venere	9,7"	66"
Marte	3,5"	25,7"
Giove	29,8"	49"
Saturno	14,5"	20,1"
Urano	3,3"	4,1"
Nettuno	2,2"	2,4"
Alpha Centauri	circa 0,007"	
Sirio	circa 0,006"	

Fig. 2 - Tabella delle dimensioni angolari dei pianeti del sistema solare

In questo breve lavoro si vuole descrivere un metodo operativo che permette di risalire al valore della dimensione angolare di un oggetto astronomico ma dopo aver determinato la distanza del corpo celeste attraverso la conoscenza del suo diametro reale e la misura del diametro (o il raggio) della sua immagine impressa su pellicola fotografica. Analogamente, si può raggiungere lo stesso obiettivo determinando il suo diametro reale conoscendo però la sua distanza e misurando il diametro della sua immagine. La tecnica proposta si basa sulla relazione che lega la dimensione apparente di un oggetto alla distanza dall'osservatore alla

quale si trova. Di tale relazione si argomenterà nel prossimo paragrafo.

2 - Un approccio diverso per misurare le dimensioni di un oggetto e la sua distanza

È facile verificare, se si osserva un oggetto qualsiasi da due punti diversi posti il secondo a distanza doppia rispetto al primo, che le dimensioni dell'oggetto osservato si riducono a metà (il suo raggio si dimezza, se l'oggetto ha forma sferica) ovvero che la sua superficie apparente si riduce di quattro volte. Viceversa, se la distanza si dimezza avvicinandoci all'oggetto, la superficie apparente diventa quattro volte maggiore. Se consideriamo un oggetto di forma sferica anche la sezione circolare di quest'ultimo presenterà un raggio che, conseguentemente, si dimezzerà o raddoppierà come infatti ci suggerisce la seguente tabella:

Raggio (m)	π	Superficie (m ²)	Rapporto superficie
1	3,141592654	3,141592654	
2	3,141592654	12,56637061	4
4	3,141592654	50,26548246	4
8	3,141592654	201,0619298	4
16	3,141592654	804,2477193	4
32	3,141592654	3216,990877	4
64	3,141592654	12867,96351	4

Fig. 3 - Tabella con parametri relativi al cerchio con raggio che raddoppia reiteratamente.

È possibile verificare sperimentalmente tale relazione in modo molto semplice. Si può ad esempio preparare l'apparato riportato nella foto di figura 4.

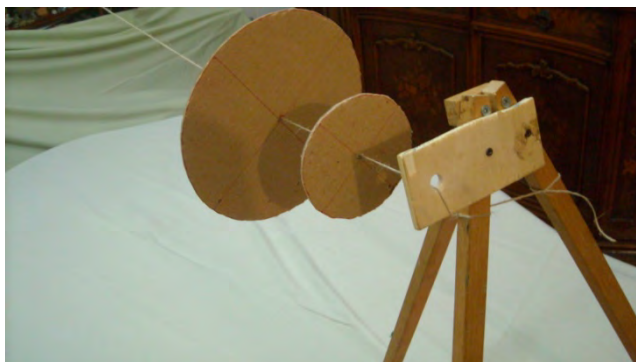


Fig. 4 - Apparecchiatura utilizzata per verificare la relazione tra diametro apparente e distanza (fotografia di Giuseppe D'Angelo).

Si tratta di realizzare due cerchi di cartone di cui uno abbia il raggio doppio dell'altro. Si lega poi ad un treppiedi improvvisato un filo che dall'altro capo viene fissato ad un supporto fisso. Al treppiedi si fissa anche una tavoletta con un foro laterale che serve per potervi guardare attraverso. Come evidenziato nella foto il filo viene fatto passare per il centro geometrico dei due dischi in modo che questi ultimi possano scorrere lungo il filo medesimo e siano in collimazione con il foro praticato sulla tavoletta. Inserendo prima un disco e poi l'altro si può sperimentare che il disco più grande deve essere posto ad una distanza doppia dal foro praticato nella tavoletta rispetto al disco più piccolo. Solo in tal modo i due dischi possono occupare pienamente il cono ottico che si forma traguardando attraverso il foro praticato nella tavoletta, escludendo dalla vista tutto il resto. Ciò dimostra la relazione

sopra ricordata tra dimensione apparente dell'oggetto e distanza dall'osservatore.

Quindi l'esperienza conferma, dal punto di vista fisico, quanto evidenziato matematicamente con i dati riportati nella tabella di figura 3. Infatti, il disco di cartone più grande ha, per costruzione, una superficie quattro volte maggiore del disco più piccolo in quanto il raggio di quest'ultimo è pari a metà di quello del disco più grande. Pertanto, raddoppia la distanza e si dimezza il raggio e la superficie diventa quattro volte più piccola. Si dimezza la distanza e raddoppia il raggio e la superficie diventa quattro volte più grande. Si è dunque pensato di applicare tale correlazione per calcolare la distanza di un corpo celeste, quale ad esempio la Luna o un pianeta del sistema solare, utilizzando un sistema che prevede la misura, come dato di riferimento, del diametro apparente mostrato dal Sole sul negativo di una foto. La foto in questione fu scattata qualche tempo fa al nostro Astro con una macchina fotografica con focale 125 mm e con pellicola Kodak 100TMX (vedi foto).¹ Per conoscere il valore del diametro apparente

¹ Ingrandendo la foto e misurando con il software grafico Gimp il diametro delle macchie presenti sulla pellicola (escludendo la prima e la terza da sinistra) è stata determinata una media delle misurazioni pari a 1,25 mm, equivalente ad un raggio medio di 0,625 mm. Le immagini prodotte del disco solare sono state ottenute nell'arco di alcune ore a cavallo del mezzogiorno locale. Come è evidente l'immagine realizzata non appare ottimale per una misura precisa della dimensione apparente del Sole. Si tratta di una foto fatta da neofiti della fotografia dove manca una precisa scelta dei tempi di esposizione. Bisognerebbe utilizzare immagini di qualità migliore. Tuttavia, il valore medio calcolato può compensare la variazione dimensionale osservata. Inoltre, la stessa immagine può essere, intanto, utile per illustrare la tecnica seguita. Nell'ipotesi di una reale e

del Sole dalla distanza alla quale si trova la Terra è possibile quindi utilizzare il negativo di una foto scattata al nostro Astro in corrispondenza del mezzogiorno locale. Basta infatti sovrapporre al negativo un foglio di acetato trasparente sul quale è stato stampato un reticolo millimetrico. Sottoponendo a scansione il negativo con il foglio millimetrato sovrapposto sarà possibile riportare al computer l'immagine ottenuta ed ingrandirla sufficientemente per misurare con una certa precisione il diametro della macchiolina rappresentante il disco solare. Il diametro apparente così misurato è in relazione con quello reale a mezzo della distanza Terra-Sole.

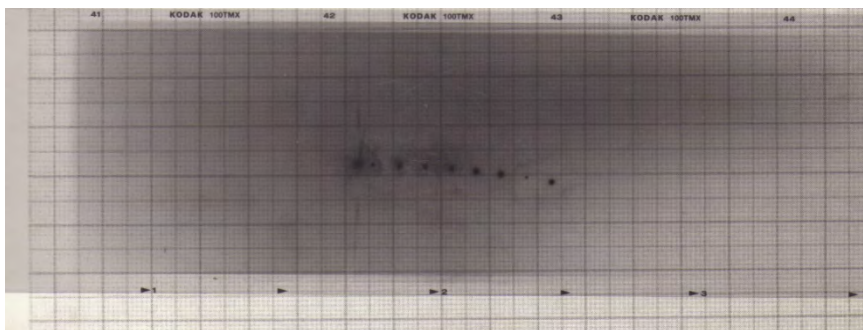


Fig. 5 – Fotogramma, con sopra un foglio millimetrato, riportante l'immagine in bianco e nero del disco solare.

Possiamo anche esprimere matematicamente la relazione di proporzionalità sopra descritta con la seguente uguaglianza, in cui R è il raggio reale dell'oggetto e D la distanza alla quale si trova l'oggetto medesimo, $\frac{1}{2}R$ è il raggio apparente alla distanza D dimezzata:

$$(2) \quad R : 1/2R = D : 1/2D$$

riconosciuta validità della tecnica proposta ben più precise e nitide immagini potranno essere utilizzate per l'esecuzione dei calcoli.

Cioè, il rapporto tra raggio maggiore e quello dimezzato deve essere uguale (a meno di una costante K) al rapporto tra la distanza maggiore e quella dimezzata.



Fig. 6 – Rapporti tra distanze e superfici

Riscriviamo quindi la (2) tenendo conto della costante K:

$$(2a) \quad \frac{R}{\frac{R}{2}} = \frac{KD}{\frac{D}{2}}$$

Dalla (2a) possiamo dedurre che la superficie apparente finale dell'oggetto possa essere il risultato di un certo numero n di osservazioni reiterate a distanze dalle quali di volta in volta si dimezza il raggio dell'oggetto. La distanza dalla quale si dimezza il raggio dell'oggetto è sempre il doppio della distanza precedente. Quindi, se il dimezzamento del raggio apparente è una conseguenza del raddoppio della distanza, successivi dimezzamenti del raggio saranno il frutto di una serie di raddoppiamenti della distanza, dei quali ogn'uno è pari per dimensioni alla somma dei valori dei vari raddoppiamenti che lo hanno preceduto più il valore della distanza iniziale. Si consideri, a titolo di esempio, la seguente tabella dove vengono riportati dei valori numerici, non riferiti ad oggetti e distanze reali, al fine di esplicitare il concetto.

Raggio (m)	π	Superficie (m ²)	Rapporto superficie	Distanza (m)
64	3,141593	12867,96	4	100
32	3,141593	3216,991	4	200
16	3,141593	804,2477	4	400
8	3,141593	201,0619	4	800
4	3,141593	50,26548	4	1600
2	3,141593	12,56637	4	3200
1	3,141593	3,141593		6400

Fig. 7 - Variazione subita dal raggio del cerchio al raddoppio della distanza

Quindi possiamo scrivere la (2a) nel seguente modo:

$$(2b) \frac{R}{\left(\frac{1}{2}\right)^n R} = K \frac{D}{\left(\frac{1}{2}\right)^n D}^2$$

Con $n \geq 1$

Posto il primo membro = X^3 avremo:

$$(2c) \frac{R}{\left(\frac{1}{2}\right)^n R} = X$$

Da cui si ricava:

$$2^n = X$$

E quindi, sostituendo ad X il suo valore otteniamo:

$$n = 40,01722717$$

² Con i dati della tabella di Fig. 7 è facile vedere che il rapporto tra raggi rappresentato dal primo membro della (2b) aumenta progressivamente all'aumentare di n, cioè all'aumentare del numero di dimezzamenti. Infatti, $\frac{64}{\left(\frac{1}{2}\right)^1 64} < \frac{64}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 64} < \frac{64}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 64} < \frac{64}{\left(\frac{1}{2}\right)^4 64}$ ecc.

³ Il valore di X può essere ricavato dal rapporto tra il raggio reale del corpo e quello della sua immagine su pellicola fotografica. Il rapporto considerato assume il valore di 1,11272E12.

Se adesso andiamo a sostituire al primo membro della (2b) il rapporto tra raggio reale del Sole e quello della sua immagine su pellicola, cioè il valore $1,11272E12$ ⁴ ed il corrispondente valore a D e ad n nel secondo membro sempre della (2b) ci accorgiamo che il valore di K è uguale a 1. Ciò si verifica perché il valore del denominatore che rappresenta la distanza minima di reiterazione è pari a 134,4454 mm ($8,987E-13 * 149600000000000$ mm). Ma se imponiamo⁵ che la distanza minima possa essere la distanza focale della macchina fotografica che nel nostro caso era 125 mm possiamo ricavare un differente valore di K. Da un semplice calcolo otteniamo:⁶

$$K = 0,929746$$

Ci rendiamo quindi conto che, se la distanza minima di reiterazione che compare al denominatore della (2b) derivante

⁴ $6,9545E+11/0,625 = 1,11272E12$

⁵ Sembra plausibile assumere che la distanza ripetitiva minima possa essere la distanza focale della macchina fotografica perché essa rappresenta la distanza dalla quale è stato fatto l'ultimo rimpicciolimento dell'immagine solare che così è stata ridotta a quella impressa sul fotogramma. In pratica l'obiettivo della macchina fotografica cattura la penultima immagine del Sole che viene rimpicciolita e focalizzata sulla pellicola posta alla distanza di 125 mm. Del resto, se il denominatore del secondo membro della (2b) lo poniamo uguale a 125 mm invece che 134,4454 mm possiamo ricavare il valore di $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Infatti, dall'uguaglianza $\left(\frac{1}{2}\right)^n * 149.600.000.000.000 \text{ mm} = 125 \text{ mm}$ otteniamo: $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 8,3556149E-13$. Ed applicando i logaritmi avremo $n = 40,122319$. Ovviamente dalla formula inversa ritroviamo il valore di D: $125 * 2^{40,122319} = 149.600.000.000 \text{ mm}$. In pratica il valore di n non subisce variazioni importanti e l'ipotesi è condivisibile. Si confronti con quanto chiarito nella nota 9.

⁶ Applicando la (2b) ed imponendo per il denominatore del secondo membro la distanza minima di 125 mm: $1,11272^{12} = K \frac{149600000000 \text{ mm}}{125 \text{ mm}}$ e quindi $K = 0,929746$

dal calcolo fatto sopra (134,4454 mm) fosse stata pari alla distanza focale della macchina fotografica il valore di K sarebbe stato pari a 1. Per avere una distanza reiterativa minima di 125 mm il raggio medio dell'immagine fotografica del Sole avrebbe dovuto essere pari a 0,581 mm invece di 0,625 mm.⁷ Probabilmente una qualità migliore dell'immagine fotografica confermerebbe un tale valore. Del resto, se prendiamo i due valori della dimensione angolare del Sole riportati nella tabella di Fig. 2 e li trasformiamo in gradi sessagesimali per calcolarne la rispettiva tangente e poi moltiplichiamo il valore di tale tangente per una distanza minima pari alla lunghezza focale della macchina fotografica, otteniamo il diametro dell'immagine fotografica del Sole nei due casi: 1,145 mm e 1,19 mm. Pari ad un raggio di 0,573 mm e 0,595 mm. Il valore ipotizzato di 0,581 mm ricade all'interno dell'intervallo considerato. Quindi per una distanza pari alla distanza focale il calcolo delle dimensioni dell'immagine del Sole, fatto utilizzando la formula della dimensione angolare,

⁷ In questo caso il valore di X della (2c) sarebbe pari a: $6,9545E+11/0,581 = 1,19699E+12$ e quindi $1,19699^{12} = K \frac{149600000000 \text{ mm}}{125 \text{ mm}}$ da cui $K = 1$

conferma le dimensioni apparenti dell'astro misurate sulla pellicola fotografica.⁸

Adesso sappiamo, dalla (2b) che il rapporto tra la distanza reale dell'oggetto e la distanza minima al termine delle reiterazioni è pari al rapporto tra il raggio reale dell'oggetto e quello della sua immagine su pellicola fotografica diviso la costante K:

$$(2d) \quad \frac{D}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 D} = \frac{R}{K \left(\frac{1}{2}\right)^2 R}$$

Considerato che il denominatore del primo membro della (2d) deve essere 125 mm possiamo determinare la distanza D.

⁸ La lente dell'obiettivo della macchina fotografica fa quello che farebbe una qualsiasi lente biconvessa e cioè creare una immagine focale rimpicciolita dell'oggetto posto all'infinito. La dimensione dell'immagine dipende poi dalle dimensioni della lente e quindi dalla sua distanza focale. Più grande è il diametro della lente maggiore sarà la sua focale e più grande anche l'immagine creata. Se ipoteticamente si potesse disporre di una lente con distanza focale uguale alla distanza Terra-Sole quest'ultima, posta a ridosso del Sole, creerebbe, alla distanza Terra-Sole, un'immagine dalle dimensioni del Sole stesso. È possibile verificare tale correlazione tra la dimensione dell'immagine e la distanza focale (e quindi la dimensione della lente) provando a mettere a fuoco, sulla medesima superficie, lo stesso oggetto, posto ad una certa distanza, usando due lenti di ingrandimento di diametro differente. La lente più grande creerà anche una immagine più grande dell'oggetto. L'obiettivo della macchina fotografica con focale 125 mm creerà quindi un'immagine del disco solare proporzionale alla sua distanza focale. Così nel calcolo appena fatto considerando la dimensione angolare del Sole, se si moltiplica l'intera distanza Terra-Sole per la tangente della dimensione angolare medesima, la dimensione ottenuta è proprio quella del diametro solare. Analogamente se aumentiamo la distanza focale (paradossalmente) fino alla distanza Terra-Sole la dimensione dell'immagine prodotta sarà quella del Sole.

Ricordando la (2c) possiamo riscrivere la (2d) nel seguente modo:

$$(3) \quad D = 125 \cdot X / K^9$$

Nel caso venisse confermato sperimentalmente che $K = 1$ la (3) diventerebbe:

$$D = 125 \cdot X \quad (3a)$$

In ogni caso la correttezza di K dipende dalla misura effettuata del raggio dell'immagine del corpo celeste.

L'utilità della (3) sembra evidente: conoscendo le dimensioni stimate dell'oggetto celeste e misurando le dimensioni della sua immagine fotografica si può risalire alla distanza alla quale si trova.

Vediamo adesso quale potrebbe essere la dimensione dell'immagine fotografica della Luna vista dalla Terra se nella (3) inseriamo i valori della distanza media Terra-Luna e le dimensioni del raggio lunare.

Scriviamo la (3) nel seguente modo:

$$(3b) \quad D = 125 \cdot R_L / (R_{\text{imm}} \cdot K)$$

Dove

R_L = raggio lunare (1,7374E+09 mm)

R_{imm} = raggio dell'immagine fotografica

D = distanza Terra-Luna (3,84E+11 mm)

$K = 0,92975$

Avremo:

$$R_{\text{imm}} = 0,60766$$

⁹ Se ulteriori misure fotografiche lo confermassero diventa evidente che la costante 125 presente nell'equazione dipenderebbe dalla distanza focale della macchina fotografica utilizzata. Cambiando apparecchiatura cambierebbe anche il valore di questo parametro.

Tale valore è molto vicino a quello del raggio della macchia prodotta sulla nostra pellicola dal Sole (0,625)!¹⁰ In effetti i due corpi celesti visti dalla Terra presentano, come noto, pressoché la stessa dimensione angolare (vedi tabella 1) perché uno è molto grande ma anche molto lontano e l'altra è molto più piccola ma assai più vicina alla Terra. Quindi la superficie impressa sulla pellicola è in proporzione diretta con le dimensioni del corpo e in proporzione inversa con la distanza del corpo celeste.

3 – Dimensione apparente del sole visto dai pianeti e dimensione apparente dei pianeti visti dalla terra

Proviamo adesso a chiederci con quale dimensione fotografica apparirebbe il Sole in una foto scattata da ciascun pianeta del sistema solare. La seguente tabella, realizzata applicando la (3) ci mostra il risultato del semplice calcolo.

¹⁰ Prendendo in considerazione il rapporto tra il valore del raggio dell'immagine lunare appena trovato (0,60766) e quello relativo al Sole (0,625) cioè il valore 0,9723(2) è possibile verificare una certa coerenza di proporzionalità del valore trovato per la Luna con i valori della dimensione angolare di Luna e Sole riportati nella tabella di Fig. 2. Infatti, se calcoliamo la media dei due valori (massimo e minimo) della dimensione angolare riportati per il Sole, pari a 1921", e moltiplichiamo tale valore per 0,9723(2) otteniamo il valore di 1867,7". Tale valore è intermedio tra il valore minimo e quello massimo della dimensione angolare della Luna.

Pianeta	D (distanza Pianeta- Sole) mm	Raggio Sole (mm)	K	Raggio immagine
Mercurio	5,80E+13	6,9545E+11	0,92975	1,6121E+00
Venere	1,08E+14	6,9545E+11	0,92975	8,6414E-01
Terra	1,496E+14	6,9545E+11	0,92975	6,2500E-01
Marte	2,28E+14	6,9545E+11	0,92975	4,1027E-01
Giove	7,79E+14	6,9545E+11	0,92975	1,2010E-01
Saturno	1,43E+15	6,9545E+11	0,92975	6,5202E-02
Urano	2,87E+15	6,9545E+11	0,92975	3,2567E-02
Nettuno	4,5E+15	6,9545E+11	0,92975	2,0786E-02

Fig. 8 – Valori del raggio dell’immagine fotografica del Sole visto dalla superficie di ciascun pianeta del sistema solare.

Se invece volessimo sapere quale dimensione fotografica avrebbe ciascun pianeta fotografato dalla terra? Si può fare un calcolo analogo però bisogna tenere in considerazione che la distanza tra il pianeta e la Terra varia continuamente a seconda della sua posizione orbitale come anche di quella della Terra. Ad esempio, la distanza di Giove dalla Terra varia da un minimo di 591000000 Km ad un massimo di 965000000 di Km. Tenendo conto che il raggio del pianeta è di 69911 Km avremo per le due distanze considerate i seguenti valori per quanto riguarda la dimensione dell’immagine su pellicola:

Pianeta	D (distanza Giove- Terra) mm	Raggio Giove (mm)	K	Raggio immagine
Giove	5,91E+14	6,99E+10	0,92975	1,5904E-02
	9,65E+14	6,99E+10	0,92975	9,7401E-03
	7,79E+14	6,99E+10	0,92975	1,2073E-02

Fig. 9 - Valori del raggio dell'immagine fotografica di Giove visto dalla superficie terrestre da varie distanze.

L'ultima riga della tabella di figura 9 riporta la dimensione del raggio dell'immagine prodotta da Giove se consideriamo Giove alla distanza dalla Terra uguale a quella che ha il pianeta dal Sole. Si può notare che il raggio dell'immagine quando si considera Giove posto alla distanza dalla Terra uguale a quella che ha Giove dal Sole risulta essere 9,95 volte più piccola di quella riportata in figura 8 ($1,201\text{E-}1/1,2073\text{E-}2 = 9,95$). Tale valore è giustificato dal fatto che anche il raggio di Giove risulta essere 9,95 volte più piccolo di quello del Sole ($6,9545\text{E+}11/6,99\text{E+}10 = 9,95$).

Analoghi calcoli possono essere facilmente fatti per tutti gli altri pianeti del sistema solare, e non solo. L'utilizzo quindi di buone immagini fotografiche di un corpo celeste permettono, applicando la (3), di calcolare la distanza del corpo dopo averne stimato la dimensione reale. È facile adesso calcolare la dimensione angolare di tutti i corpi del sistema solare visti dalla Terra. È sufficiente applicare la già ricordata formula: $\delta = \arctan \frac{\text{diametro}}{\text{distanza}}$. Se invece si volesse conoscere il diametro del corpo celeste conoscendone la sua distanza e misurandone

la dimensione della sua immagine su pellicola si può applicare parimenti la relazione (3b) dalla cui formula inversa si può ricavare il dato cercato.

4 – Considerazioni conclusive

I dati presentati ci suggeriscono che è possibile dedurre la distanza alla quale si trova un corpo celeste se si possiede una immagine fotografica del corpo medesimo. Sul principio teorico non influisce l'eventuale utilizzo di sistemi ottici di ingrandimento. Infatti, l'ingrandimento realizzato è sempre noto e quindi la dimensione reale dell'immagine fotografica può sempre essere calcolata. La tecnica presentata in questo breve lavoro è semplice. È sufficiente misurare il raggio dell'immagine del corpo celeste impressa sul fotogramma e, ipotizzando un raggio reale dell'oggetto astronomico, ricavarne la distanza utilizzando la (3). Ipotizzare il raggio reale non significa proporre un valore a caso ma affidarsi ad altri sistemi di accertamento basati su differenti parametri astronomici come ad esempio la luminosità. Gli strumenti per un compito simile li abbiamo già e sono la luminosità apparente, derivante da brillantezza e distanza, e la temperatura superficiale, determinata dal tipo spettrale. A partire da questi dati è possibile applicare poche formule per giungere alla dimensione di una stella ed è proprio in questo modo che gli astronomi hanno proceduto finora per trovare che molte stelle sono più piccole del nostro Sole e molte altre sono più grandi. La legge di Stefan-Boltzmann è utilizzata per determinare la dimensione di una stella. Essa afferma che: l'ammontare di energia che una stella irradia ogni secondo da

un metro quadrato della sua superficie è proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura superficiale T . In formule, il flusso energetico F di una stella è dato dalla relazione di *Stefan-Boltzmann* seguente:

$$(4) \quad F = \sigma T^4$$

La relazione tra flusso F , luminosità L e raggio della stella R è data dalla relazione:

$$(5) \quad L = 4\sigma R^2 \sigma T^4$$

dove L è la luminosità della stella espressa in Watt, R è il suo raggio espresso in metri, σ è la costante di Stefan-Boltzmann mentre T è la temperatura superficiale espressa in gradi Kelvin. In tal modo si può ricavare il raggio di un corpo celeste anche piuttosto lontano. Può essere una stella oppure una galassia. Infatti, anche di una galassia si possono stimare le dimensioni attraverso misurazioni della loro massa.¹¹ Dedotta la dimensione reale dell'immagine fotografica tenuto conto dell'ingrandimento si può dedurre, di conseguenza, la sua distanza dal Sole.

Tramite ALMA (Atacama Large Millimeter/Submillimeter Array) si è riusciti a ottenere una immagine di Betelgeuse e del suo disco.

Analogamente si può fare per altre stelle e/o galassie. Tenendo conto dell'ingrandimento fornito da questa moderna tecnologia osservativa si potrebbe probabilmente pensare di ricavare informazioni, grossomodo attendibili, sulla distanza alla quale si trovano questi corpi celesti utilizzando le informazioni fornite dai fotogrammi scattati.

¹¹<https://www.astronomiamo.it/DivulgazioneAstronomica/Area/Unit%C3%A0%20di%20misura%20in%20Astronomia/Dimensione-e-massa-in-astronomia-tecniche-di-misurazione>

Certamente la tecnica ipotizzata, se venisse confermata da ulteriori misurazioni, non appare di grande affidabilità perché la misura delle dimensioni dell'immagine fotografica potrebbe essere poco precisa. Tuttavia, l'utilizzo di apparecchiature ottiche raffinate e l'analisi computerizzata delle immagini potrebbero migliorare l'accuratezza del metodo.

Sitografia

<http://astrolab.altervista.org/articoli/angolo.html>

https://it.wikipedia.org/wiki/Diametro_angolare

<https://www.astronomiamo.it/DivulgazioneAstronomica/Area/Unit%C3%A0%20di%20misura%20in%20Astronomia/Dimensione-e-massa-in-astronomia-tecniche-di-misurazione>

https://www.phys.uniroma1.it/fisica/sites/default/files/file_PLS/OtticaGeometrica.pdf

Bibliografia

PALMIERI E. Lupia, PAROTTO M. (2004). *Il Globo Terrestre e la sua Evoluzione -quinta edizione*. Bologna: Zanichelli

KARTTUNEN H., OJA H., KROGER P., POUTANEN M. (2023). *Fondamenti di astronomia*. Novara: UTET

RIVA W., COSTA M., ZAMBONIN D. (2025). *Sistema solare. Dai pianeti del Sole ai mondi delle altre stell.* Vercelli: Nuinui Editore

Aritmetica e probabilità

Umberto Bartocci * Rocco Vittorio Macrì **

* bube231@yahoo.it

** rvm2000@gmail.com



DOI : 10.53159/PdM(IV).v7n3.163

Sunto: Si discute il concetto di probabilità in termini di insiemi finiti, e si propongono alcune applicazioni didattiche del concetto in ambito puramente aritmetico.

Parole Chiave: Aritmetica, Probabilità, Numeri primi.

Abstract: We discuss probability in terms of finite sets, and its possible educational applications in the field of pure arithmetics.

Keywords: Arithmetics, Probability, Prime numbers.

1 - Considerazioni epistemologiche

Nel periodo della cosiddetta "crisi dei fondamenti" della matematica¹, Bertrand Russell si divertiva a dar sfoggio del suo ... nichilismo epistemologico (peraltro un *morbis mathematicorum recens* all'epoca alquanto diffuso, secondo una felice

¹ Per il quale si sceglie convenzionalmente il 1902 come data d'inizio, ma la cui origine profonda deve essere vista secondo noi nella crescente influenza del darwinismo negli ultimi decenni del secolo XIX.

espressione di Gottlob Frege²), con affermazioni rimaste famose quali:

*Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true*³.

Ad essa qualche anno più tardi accompagnò una seconda più specifica battuta relativa a un settore "moderno" della matematica, ossia il Calcolo delle probabilità:

*Probability is the most important concept in modern science, especially as nobody has the slightest notion what it means*⁴.

Accennato rapidamente al fatto che la prima affermazione può essere facilmente ignorata da chiunque condivida le riflessioni di Immanuel Kant sull'argomento, secondo cui le due colonne portanti della matematica, l'aritmetica e la geometria, sono emanazione diretta delle due "intuizioni trascendentali" di tempo e spazio⁵, rispettivamente, intendiamo qui occuparci

² "Logik in der Mathematik", in *Logik*, Görres-Gesellschaft zur Pflege der Wissenschaft, 1914; Imre Toth, «La philosophie mathématique de Frege. Restauration philosophique et contre-révolution scientifique», in *Liberté et vérité. Pensée mathématique et spéculation philosophique*, Paris-Tel Aviv, Éditions de l'éclat, 2009.

³ "Mathematics and the Metaphysicians", in *Mysticism and Logic and Other Essays*, 1910, 1917.

⁴ Da una lezione tenuta alla Beacon Hill School nel 1929, scuola fondata dallo stesso Russell e dalla moglie Dora nel 1927.

⁵ «Tempo e spazio sono pertanto due fonti del conoscere, dalle quali possono essere attinte a priori varie conoscenze sintetiche, come segnatamente ce ne dà uno splendido esempio la matematica pura, rispetto alla cono-

brevemente della seconda, della quale si può invece dire che ... è un po' giusta e un po' sbagliata, ossia, ha un qualche fondamento ma rischia di indurre in confusione su un concetto che dovrebbe essere viceversa chiarissimo.

Russell avrebbe certo ragione se volesse far notare che il concetto di probabilità viene spesso utilizzato per dare apparente sostanza "scientifica" (quantitativa) ad espressioni che sono invece puramente linguistiche (che non vuol dire però prive di significato), nelle quali i "numeri" possono benissimo essere sostituiti con avverbi di quantità, probabile, molto probabile, poco probabile. Anche nella giurisprudenza⁶ è invalsa l'abitudine di parlare di logica e probabilità un po' fuori contesto («il concetto di probabilità è fondamentale per la valutazione del nesso causale tra un fatto e un evento, soprattutto in ambiti come il diritto penale e civile»), si potrebbe quasi dire come espediente retorico. Ovvero, una quantificazione il cui effetto è unicamente quello di definire una semplice relazione di preordine tra le diverse possibili modalità di un evento, e a farlo con i numeri è forse più bello, e più "scientifico". Infine, a proposito di quella che potrebbe riconoscersi come una sorta di "infatuazione probabilistica", val forse la pena di ricordare anche il titolo del seguente libro, la cui "modernità" pretende appunto di introdurre la probabilità perfino nel campo della teologia, senza dimenticare nemmeno un riferimento a certe

scenza dello spazio e dei suoi rapporti. Essi cioè sono, tutte e due, forme pure di tutte le intuizioni sensibili; e così rendono possibili proposizioni sintetiche a priori», *Critica della ragion pura* - Estetica trascendentale, § 7.

⁶ Su tale questione in generale si veda per esempio: Gaetano Carcaterra, "Ragionare per esclusione nel diritto riflessioni su un tema di Bobbio", *i-lex Scienze Giuridiche, Scienze Cognitive e Intelligenza Artificiale*, Rivista quadrimestrale on-line: www.i-lex.it Marzo 2007, numero 7.

famose rivoluzioni concettuali nel campo della Fisica: *Teologia del probabile. La realizzazione cristiana dal limite alla relatività*⁷.

Viene da chiedersi infatti come si facesse prima che il termine probabilità si affermasse, tenuto conto che sembra esso fosse addirittura assente almeno dalle nostre parti in tempi antichi⁸, e che la sua introduzione risalga soltanto al periodo "moderno", soprattutto a favore di una famiglia speciale di giocatori (di carte o di dadi), come spiegherebbe qualsiasi testo attuale di Storia della probabilità.

Ciò premesso, aumentano la confusione i diversi approcci teorici alla probabilità, tra l'altro spesso non si comprende nemmeno probabilità "di che cosa"⁹. Approccio frequentista (o quantitativo), «che si basa su calcoli statistici e frequenze di eventi passati» (e se l'evento fosse uno solo, o solo ipotetico?), approccio logico (o baconiano), approccio soggettivista, approccio assiomatico, etc.. Per non dire del fatto che lungo il cammino si è perso anche il senso preciso di alcuni termini quali "stocastico"¹⁰, che rimanda alla "congettura", al "lancio", al "bersaglio", come nell'etimo originale greco, piuttosto che al "casuale", o "aleatorio". In latino, *alea* è appunto il dado, e non

⁷ Di Adriana Zarri (1919-2010), Gabrielli Editori, Verona 2025.

⁸ Francesca Piazza, Salvatore Di Piazza, *Verità verosimili. L'eikos nel pensiero greco*, Mimesis, Milano, 2012. Lecito comunque dubitare della circostanza che certe naturali contrapposizioni concettuali, quali raro vs comune, verosimile vs inverosimile, possibile vs impossibile, etc., non siano presenti in ogni linguaggio che sia un minimo "evoluto".

⁹ Ci asteniamo volutamente dal commentare il termine "evento", poiché ci appare ... misterioso, sia nel presente contesto che in quello della Teoria della relatività (ristretta).

¹⁰ Jakob Bernoulli, *Ars Conjectandi*, opera pubblicata postuma nel 1713, otto anni dopo la morte dell'autore.

ci sembra che elaborare una congettura, con la ricerca preliminare di tutta l'evidenza disponibile che essa richiede, equivalga al lancio di un dado, bensì ad un altro genere di lancio, che presuppone di aver ben preso la mira. Ovvero, sulla questione pesa pure, secondo noi, l'inevitabile connessione ludica che la materia presenta in virtù delle note origini storiche dianzi richiamate¹¹, la "Teoria dei giochi" nel senso letterale del termine non rientrando in quella che è la concezione classica della Matematica (diremmo, può interessare poco).

La circostanza su cui si fonda quindi la parte accettabile della critica di Russell alla probabilità è che di essa si parla spesso come se la sua assegnazione fosse "oggettiva", ed abbia quindi senso chiedere: "quale è LA probabilità etc.", anche in situazioni dove tale assegnazione è invece almeno in parte "soggettiva", e non è possibile allora usare il termine probabilità con l'articolo determinativo singolare. Insomma, se, di fronte ad un dato crimine commesso con certezza da una persona X, la quale è stata in stretta connessione, familiare o di lavoro o altro, con un secondo soggetto Y, ci si chiedesse quale sia la probabilità che Y sapesse o non sapesse dell'attività criminosa di X, è ovvio che ci troveremmo di fronte ad una probabilità che non si sa realmente cosa sia, e come si possa determinare con una qualche esattezza (e la questione potrebbe essere complicata sostituendo al verbo sapere il verbo sospettare). Se

¹¹ La famosa lettera di Pascal a Fermat è del 1654, ma era stata preceduta diversi anni prima dal breve saggio *Sopra le scoperte dei dadi* di Galilei (rimasto in forma manoscritta, fu redatto a Firenze tra il 1613 e il 1623), mentre al 1663 risale la pubblicazione del *De Ludo Aleae* di Gerolamo Cardano. Riflessioni matematiche sul gioco dei dadi si trovano anche nella *Summa* del Pacioli, 1494.

lo facessimo, si tratterebbe soltanto di un'espressione di convinzioni personali non quantificabili. Ciò nondimeno, se invece si scrivessero su 10 bigliettini i numeri da 1 a 10, e poi si sorteggiasse uno di codesti bigliettini, le probabilità che esca un numero pari o un numero dispari, oppure un numero primo, etc., sarebbero tutti valori univocamente determinabili in maniera assolutamente razionale e oggettiva, sicché il "soggettivista" che non fosse d'accordo con tali determinazioni si collocherebbe irrimediabilmente sul versante dell'irrazionalità.

In conclusione, ferma restando la validità di alcune osservazioni dei soggettivisti¹², e la circostanza quindi che l'attribuzione da parte di un soggetto di un valore di probabilità (sottinteso, in un dato istante t a "qualcosa" per cui l'espressione abbia qualche senso) dipende essenzialmente dallo "stato dell'informazione" del soggetto in quell'istante t , è pur vero invece che le radici del concetto di probabilità in Matematica vanno ritrovate in maniera del tutto precisa nella elementare Teoria degli insiemi diciamo pure finiti, una teoria che in fondo non è altro che l'antica logica aristotelica un po' rivisitata e formalizzata¹³. Quasi a definire implicitamente il campo della "logica elementare" come tutto ciò di cui si possa parlare (o pensare) attraverso i concetti di insieme e funzione (corrispondenza, morfismo), vale a dire, il linguaggio della affasci-

¹² Quali per esempio Bruno de Finetti, "Fondamenti logici del ragionamento probabilistico", *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 1930, n. 5, pp. 1-3.

¹³ Insomma, altro che "insiemistificazione" della matematica, come amava dire il matematico de Finetti menzionato nella Nota precedente, si tratta unicamente di una sorta di formalizzazione della logica (con l'uso di ... stenografia!), la quale non può non precedere ogni ragionamento di tipo matematico, ma non solo.

nante Teoria delle categorie¹⁴. Prima ci si renderà conto di questa circostanza, e ci si abituerà a familiarizzare con essa, meglio sarà, a qualsiasi età, a partire ovviamente dall'avvento di quella della "ragione".

2 - La "logica" della probabilità

Si è ormai compreso che, secondo noi, almeno l'inizio del Calcolo delle probabilità non può non essere collocato che nella definizione di una ben precisa corrispondenza

$p_U: P(U) \rightarrow N_0$ (l'insieme dei numeri naturali più lo 0),

dove U è un qualsiasi insieme finito non vuoto (una sorta di "universo"), e dove $p_U(X)$ è definito, per qualsiasi sottoinsieme X di U , come il rapporto $|X|/n$, cioè un numero razionale positivo o nullo rappresentato da una frazione il cui numeratore è il numero degli elementi di X , ed il denominatore $n = |U|$ è il numero degli elementi di U . Va da sé, tale definizione è sostanzialmente la stessa che Laplace dette nel 1812 nell'"Introduction" della sua *Théorie analytique des Probabilités*, peccato però riconducendola ancora alla teoria dei giochi, *des hasards*, ed introducendo il famoso giro vizioso dell'equiprobabilità per definire la probabilità: «*La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de*

¹⁴ Vedi per esempio Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1971.

ce nombre à celui de tous les cas possibles est la mesure de cette probabilité, qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles».

Il valore $p_U(X)$ può invero intendersi come la probabilità che un elemento di U si trovi in X , e da qui è facile poi definire per esempio una probabilità condizionata $p(X|Y)$ semplicemente mediante:

$$p(X|Y) = |X \cap Y| / |Y| = p_Y(X \cap Y)$$

(ovviamente, $p_U(X)=p(X|U)$), ed in seguito dimostrare le usuali proprietà di una funzione di probabilità, fino alla formula di Bayes, etc.. Vale a dire, quelle proprietà che, in un momento successivo, potrebbero essere proposte come "assiomi", punti di partenza, cioè per una definizione "formale", etc. etc.. Si può poi naturalmente procedere sulla stessa strada, accrescendo lo scenario con grafi ed alberi, strutture che rappresentano n -tomie probabilistiche, semplici concetti corrispondenti a partizioni, sottopartizioni, etc., tutto perfettamente chiaro e rigoroso, all'interno della categoria degli insiemi finiti¹⁵.

Ci sembra di poter asserire che siamo così di fronte a una perfetta e facile costruzione matematica la quale ha più a che fare con una "logica della certezza", anziché con una "logica

¹⁵ La Teoria della probabilità viene così ad essere concepita come una sorta di gigantesca *Ars Combinatoria*, o *Ars Magna*, secondo le corrette aspettative di coloro che ripresero la logica antica nell'età moderna, un lungo elenco da non dimenticare nel corso di lezioni di storia del pensiero.

dell'incertezza"¹⁶, e che non merita dunque l'ironia squisitamente anglosassone del III Conte Russell.

Quindi tutto qui per quanto concerne l'analisi del concetto di probabilità? Ovviamente no, basta al riguardo consultare uno qualsiasi dei numerosi testi dedicati alla materia, o pensare alla generalizzazione della probabilità dal regno del discreto a quello del continuo, che si trova per esempio a fondamento della Meccanica Quantistica. Ma quanto dianzi accennato non può non esserne l'introduzione, il fondamento, alla quale affermazione aggiungiamo però che, pur rimanendo nell'ambito del finito, i problemi "pratici" con cui si ha subito a che fare rivestono notevole interesse in sé, sebbene di natura alquanto differente. Un valore $p_U(X)$, che si voglia utilizzare all'interno di considerazioni di qualsiasi altra natura, può infatti nella realtà essere di difficile determinazione, quando si abbia a che fare per esempio con un universo U abbastanza

¹⁶ Riprendendo il tema astratto dei "bigliettini" numerati da 1 a 10, e ponendo per esempio l'attenzione sui numeri primi, in questo segmento iniziale di N (un concetto su cui torneremo in seguito) ce ne sono 4, quindi la probabilità che da un'estrazione esca un bigliettino primo è $4/10$. Se questa frazione misura l'incertezza del risultato dell'estrazione, incertezza ovviamente insuperabile, dove sta invece la certezza? Sta nel fatto che, se numeriamo per esempio 10 studenti da 1 a 10, e diciamo che proclamerebbero vincitori di qualche premio coloro il cui numero corrisponda in qualità al numero estratto, ossia primo o non primo, sappiamo per certo che ci saranno esattamente 4 vincitori e 6 sconfitti, o viceversa, aut aut, ovvero, *tertium non datur*. In conclusione di Nota, sottolineiamo però che, ovviamente, sostenere che il Calcolo delle probabilità sottende in definitiva ad edificare una "Teoria delle decisioni in condizioni di incertezza" non è certo insensato, così come riconoscere che esso può benissimo servire a sviluppare metodi per analizzare e calcolare i "rischi", ciò che è il fondamento del sistema delle assicurazioni.

"grande". Si cercherà allora di ridurre in proporzione U ed X , sperando in cotal modo di riuscire a valutare $p_U(X)$ con buona approssimazione, ovvero a partire da una serie di valori $p_U(X')$, e questo è il compito della "teoria del campionamento" dell'Inferenza statistica (la Statistica è una disciplina contigua alla Probabilità, ma appunto diversa, decisamente diversa)¹⁷.

Non vogliamo qui dire di più sulla costruzione dianzi accennata, che è in fondo una parte assai elementare della Teoria degli insiemi finiti e dell'Aritmetica (Calcolo combinatorio). Desideriamo piuttosto suggerire nella seconda parte dell'articolo come si possano presentare a dei giovani studenti molteplici e istruttivi ambiti di pensiero, grazie ai quali essi potranno cominciare a familiarizzare sia con concetti aritmetici sia con concetti probabilistici, ampliando così l'orizzonte delle conoscenze matematiche, e di conseguenza pure ... il numero delle connessioni neurali (chissà che questo argomento non possa convincere anche ragazzi meno sensibili al fascino di certe questioni che meditare su di esse può risultare in ogni caso vantaggioso).

¹⁷ La differenza epistemologica fondamentale consiste nel fatto che la Statistica è per sua definizione una scienza del passato, mentre della Teoria della probabilità si dice che essa ha l'aspirazione di "prevedere il futuro" (non è naturalmente vero, ma ha qualche senso), e l'unico "ponte" logico possibile tra tali due ambiti dell'esperienza umana è l'ipotesi di natura tautologica: "Se il futuro sarà come il passato ...". Noi preferiremmo piuttosto rilevare che la Statistica ha a che fare con il "reale", mentre la Probabilità, almeno sotto l'aspetto che stiamo qui discutendo, ha a che fare con il puramente razionale.

3 - Probabilità aritmetiche

«Il linguaggio del calcolo delle probabilità è pieno di esempi e applicazioni a giochi usuali quali i dadi, le carte, il lotto, e questo deriva certamente da motivazioni storiche: Pascal, Fermat, Galileo, Bernoulli, furono alcuni grandi matematici che fondarono il calcolo delle probabilità stimolati da quesiti posti dai risultati e dalle aspettative del gioco d'azzardo», è questo l'*incipit* di un testo reperibile in rete¹⁸ sul Calcolo delle probabilità che conferma quanto sopra illustrato. Come annunciato però nella prima parte del presente scritto, intendiamo superare codesta impostazione "ludica", facendo adesso vedere invece che ci si può tranquillamente familiarizzare con proprietà probabilistiche rimanendo nel campo tradizionale dell'aritmetica. Vale a dire che d'ora in avanti il nostro "universo" sarà l'insieme dei numeri naturali N , la cui infinitezza nulla toglierà alle desiderate applicazioni, poiché all'interno di esso evidenzieremo di volta in volta dei particolari sottoinsiemi finiti sui quali opereremo, a cominciare dagli intervalli (o segmenti) iniziali di N :

$$S(n) = [1, n] = \{1, 2, \dots, n\},$$

oppure intervalli non iniziali:

$$S(k, n) = [k, n] = \{k, k+1, k+2, \dots, n\} \quad (1 < k \leq n)^{19}.$$

Abbiamo già accennato al "gioco"²⁰ dei bigliettini con i numeri da 1 a 10, e al calcolo dei numeri pari o dispari presenti

¹⁸ <https://digilander.libero.it/zinabianca/probabilita.htm>

¹⁹ Mettere in evidenza subito che $S(n, k)$ contiene $n-k+1$ elementi e non $n-k$ è doveroso, basta fare un test su un qualsiasi campione di popolazione per rendersene conto!

²⁰ Tanto per ... autocontraddirci subito, ma c'è gioco e gioco, e qui non stiamo parlando di ... giochi d'azzardo! Aggiungiamo poi che si tratta solo

appunto in $S(10)$, oppure in $S(11)$, tante possibili scelte che cambiano, sebbene nei detti casi di poco, le valutazioni di "probabilità" di cui stiamo parlando. Ma si può porre l'attenzione su altre interessanti classi di numeri, per esempio i numeri primi e, volendo distinguere tra questi i numeri primi diversi dal 2 e dal 3 (numeri primi evidentemente "speciali"), far "scoprire" agli studenti che l'insieme dei numeri primi che restano, diciamolo PO (primi "ordinari"; gli elementi di PO sono tutti ovviamente dispari), si può suddividere (bipartire) in due famiglie disgiunte: quella degli elementi di PO che divisi per 6 danno resto 1, e l'altra contenente quegli elementi di PO che divisi per 6 danno invece resto -1 (o se si preferisce 5). Vale a dire, si scopre una bipartizione naturale:

$PO = PO(-) \cup PO(+)$, dove i numeri primi di $PO(-)$ potrebbero denominarsi "anteprimi", numeri che si trovano cioè prima di un multiplo di 6, e "postprimi" gli altri, gli elementi di $PO(+)$, quelli cioè che si trovano dopo un multiplo di 6.

Ecco un modo forse interessante e non "noioso" di introdurre argomenti del tipo la divisione euclidea con resto, per eccesso o per difetto, il concetto generale di congruenza con le relative proprietà, etc., per tornare poi sul versante probabilità con il proporre domande del tipo: quale probabilità abbiamo in $S(10,20)$ di trovare un anteprimo, o un postprimo?, così man mano "scoprendo" che anteprimi e postprimi sono più o meno presenti nello stesso numero in codesti intervalli, ma con qualche fluttuazione non facile da prevedere *ab initio*.

di "giochi mentali", un po' come i famosi Gedankenexperiment di Albert Einstein.

Potremmo poi volendo introdurre la questione della "distanza" tra due numeri primi, e parlare così del cosiddetto postulato di Bertrand, della sorprendente congettura di Goldbach che lo implica, della congettura dei numeri primi gemelli, delle generalizzazioni di Polignac, e calcolare per esempio le probabilità di trovare primi o primi gemelli o primi a distanza 4, etc., in dati intervalli.

È ormai chiaro che cosa intendiamo, e non vogliamo insisterci troppo, gli esempi da utilizzare sono evidentemente numerosissimi (multipli, progressioni aritmetiche o geometriche, quadrati, etc.), anzi ... infiniti. Ci preme piuttosto accennare al fatto che, con studenti più grandini, per esempio quelli di una classe liceale, ci si potrebbe spingere fino a far intuire questioni di comportamento asintotico, e ad introdurre concetti che consentano di andare in direzione di definizioni più complesse, quali per esempio quella di densità di Schnirelmann di un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$. Si scoprirebbe così, per fare qualche esempio, che i numeri pari sono quanti intuitivamente essi appaiono, ossia la "metà" di tutti i numeri naturali, allo stesso modo che i numeri dispari sono la metà di tutti i numeri naturali, inoltre che i numeri pari sono "tanti quanti" i numeri dispari, entrambi gli insiemi però "più grandi" dell'insieme dei numeri primi, etc. etc.. In tale ambito di idee, dopo alcune constatazioni di natura che potremmo dire sperimentale sulla distribuzione dei numeri primi (e ci si potrebbe nell'occasione anche avviare all'uso di un calcolatore), si potrebbero introdurre la relativa funzione enumerativa $\pi(n)$ (la cosiddetta *Prime Counting Function*), e l'associata funzione di probabilità $\pi(n)/n$, indi enunciare il famoso Teorema dei numeri primi (PNT, *Prime Number Theorem*), che di questa fun-

zione di probabilità descrive il comportamento asintotico, confrontandola con la funzione $1/\log(n)$.²¹

Facile a questo punto che tali naturali "comparazioni" di sottoinsiemi infiniti di numeri naturali possano invogliare ad un excursus sull'aritmetica transfinita cardinale di Cantor, e sui cosiddetti "paradossi dell'infinito", ovvero quelli concernenti la "quantità" del tutto e della parte. Un discorso che prenda ovviamente le mosse dal ragionamento di Galileo sui numeri quadrati²², i quali, sebbene siano progressivamente sempre di meno di tutti i numeri - e questo è comunque un "fatto" matematico da tenere in debito conto - pur tuttavia sotto un altro punto di vista possono riconoscersi essere "tanti quanti" tutti i numeri naturali, etc..

4 - Numeri primi e "numeri di Sofia"

Vogliamo presentare infine un'altra interessante classe di numeri naturali, che, oltre a poter essere utilizzati nelle precedenti comparazioni di natura probabilistica, mostrano anche particolari connessioni con i numeri primi, connessioni per lo più ancora oscure, ma sicuramente notevoli.

²¹ Qui $\log$ designa il logaritmo neperiano. $1/\log(n)$ è una funzione (o, se si preferisce, una successione) che è evidentemente infinitesima al divergere di n , ed essendo tale che il relativo rapporto $(\pi(n)/n)/(1/\log(n))$ ha limite uguale ad 1, appunto secondo lo splendido teorema PNT dianzi menzionato, ecco provato che pure la probabilità $\pi(n)/n$ è infinitesima al divergere di n , e che quella reciproca di funzione logaritmica la approssima convenientemente.

²² Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Prima giornata, 1638.

Diciamo Σ il sottoinsieme di N costituito da tutti quei numeri, che chiameremo "numeri di Sofia"²³, i quali possono essere scritti in base decimale come una stringa contenente soltanto le cifre 1 e 7. Se poi indichiamo con $\Sigma(n)$, per ogni numero naturale n , il sottoinsieme di Σ di tutti quei numeri di Sofia che hanno lunghezza n , è chiaro che otteniamo una "bella" partizione di Σ in infiniti sottoinsiemi finiti: $\Sigma = \cup \Sigma(n)$.

Insomma, con ovvio significato dei simboli (per esempio il simbolo $\oplus$, improvvisato per l'occasione):

$$\Sigma(1) = \{1, 7\}$$

$$\Sigma(2) = 1 \oplus \Sigma(1) \cup 7 \oplus \Sigma(1) = \{11, 17\} \cup \{71, 77\} = \{11, 17, 71, 77\}$$

...

$$\Sigma(n) = 1 \oplus \Sigma(n-1) \cup 7 \oplus \Sigma(n-1) = \{1111...1, 1...17, 1...171, \dots, 7777...7\}^{24}.$$

Dopo aver sottolineato che il precedente ordinamento coincide con quello naturale indotto da N , osserviamo esplicitamente che tra i numeri di Sofia ci sono quei particolari numeri con tutte le cifre uguali ad 1, che sono stati chiamati *repunit* (*repeated unit*) nel bel libro di Albert Beiler *Recreations in the Theory of Numbers* (1964)²⁵. Osserviamo inoltre, dato il nostro

²³ Codesta denominazione viene scelta in onore dell'ultima nipotina del più anziano degli autori. Tali numeri sono già stati oggetto di attenzione in un articolo dei medesimi autori intitolato "Numeri primi e numeri di Sofia", che è stato pubblicato in *Rudi Mathematici*, N. 321, 2025:

<https://www.rudimathematici.com/archivio/archiviodb.php>.

²⁴ Volendo, si potranno mettere i numeri di Sofia di lunghezza maggiore o uguale di 2 in relazione con i vari "prodotti formali" non commutativi $(1+7)(1+7)=11+17+71+77$, $(1+7)(11+17+71+77)=111+117+171+177+711+717+771+777$, etc..

²⁵ In questo libro non c'è però, né ci risulta sia presente altrove, un qualche accenno ai numeri di Sofia in generale

interesse per i numeri primi, che le *repunit* possono essere talvolta dei numeri primi, come nei casi $\Sigma(2)$ oppure $\Sigma(19)$ o ancora $\Sigma(23)$ ²⁶.

Gli insiemi $\Sigma(n)$ sono ricchi di struttura, né potrebbe essere altrimenti, visto che ogni dato $\Sigma(n)$ rappresenta sostanzialmente l'insieme delle parti di un insieme finito con n elementi: per rendersene conto, basta interpretare un numero di Sofia come una funzione caratteristica, dove la cifra 7 prende il posto dello 0, con il vantaggio però che il 7 può essere la cifra iniziale di un numero naturale, mentre lo 0 no²⁷. Detto in maniera più "tecnica", esiste un isomorfismo naturale tra $\Sigma(n)$ e $P(S(n))$, l'insieme delle parti del segmento iniziale $S(n)$ di $\mathbb{N}$, dove l'unica *repunit* di $\Sigma(n)$ corrisponde all'intero $S(n)$, il numero 777...7 all'insieme vuoto, etc.. Tra l'altro, da ciò si ottiene subito il numero cardinale di $\Sigma(n)$, $|\Sigma(n)| = 2^n$. Si aggiunga adesso che in $P(S(n))$, $n \geq 2$, ci sono ovviamente gli n sottoinsiemi con un solo elemento, che si chiamano i *singleton* di $S(n)$, i quali sono tanti quanti i loro complementari, ossia i sottoinsiemi con $(n-1)$ elementi, etc.. I numeri di Sofia corrispondenti a codesti sottoinsiemi, numeri che hanno quindi tutte le cifre

²⁶ Non si sa ancora oggi per quali lunghezze si ottengano codesti speciali numeri primi, si sa soltanto che tali eventuali lunghezze debbono a loro volta essere numeri primi (un facile teorema), come dire che la precedente comparsa dei numeri 2, 19, 23 non è un caso fortuito. Aggiungiamo che si ottengono *repunit* prime anche per le lunghezze 317, 1031, e poi un grande salto fino a 49081. Insomma, sempre più **rare**, le successive corrispondenti alle lunghezze 86453 e 109297, ed infine addirittura 270343, l'ultima tale lunghezza fino ad oggi nota, a quel che ci risulta.

²⁷ Della scelta del 7, giustificata dalla sua relazione con il 6, e di questo speciale numero con i numeri primi, avremo presto modo di comprendere l'utilità.

uguali ad 1 ed una sola uguale a 7, potranno chiamarsi *quasi-repunit* (o *near-repunit*), ecco qui le prime di esse: 17, 71, 117, 171, 711, 1117, Da tale connessione insiemistica consegue che $\Sigma(n)$ ammette un automorfismo involutorio $\delta : \Sigma(n) \rightarrow \Sigma(n)$ corrispondente alla complementazione, che possiamo chiamare "dualità", per esempio $\delta(117) = 771$ (i duali delle *quasi-repunit* corrispondono ai *singleton* di $P(S(n))$), ed un'ulteriore interessante analoga corrispondenza *reverse* ρ , per esempio $\rho(1117) = 7111$, con la conseguenza che alcuni numeri di Sofia si potranno dire palindromi, come 1771, quelli cioè che coincidono con il loro *reverse*.²⁸

Già da queste prime considerazioni si comprende come con i numeri di Sofia si possa "giocare" in due modi differenti, qualche volta interagenti tra di loro, ovvero come semplici stringhe, o come numeri naturali corrispondenti a quelle stringhe. Proseguendo nella descrizione dei $\Sigma(n)$ sotto l'aspetto stringhe, introduciamo presto delle interessanti operazioni "somma" tra di essi, somme però non commutative, del tipo $\oplus : \Sigma(n) \times \Sigma(k) \rightarrow \Sigma(k+n)$ (utilizzando qui un simbolo di ovvia interpretazione già introdotto in altro comunque analogo contesto), che sono definite semplicemente "attaccando" un numero di Sofia ad un altro, esempio $117 \oplus 71 = 11771$. Introdotte adesso le due equibipartizioni naturali che ogni $\Sigma(n)$ possiede, $\Sigma(n) = {}_1\Sigma(n) \cup {}_7\Sigma(n)$, e $\Sigma(n) = \Sigma(n)_1 \cup \Sigma(n)_7$, con evidente riferimento dei nuovi simboli a quei numeri di Sofia che cominciano per 1 o per 7, o che finiscono per 1 o per 7, è evidente il loro

²⁸ Essendo ovvio che nessun numero di Sofia può coincidere con il proprio duale, val la pena osservare che possono invece coincidere il duale ed il *reverse* di un dato numero di Sofia, come per esempio nei casi di 17 e 71, o 1717 e 7171, etc..

collegamento con l'operazione somma dianzi definita. Se $n \geq 2$, tutto ciò consente di definire 4 monomorfismi di estensione, da $\Sigma(n-1)$ a $\Sigma(n)$, ai quali si accompagneranno 2 naturali epimorfismi di restrizione. Sarebbe semplice verificare quali relazioni hanno tra loro queste 6 corrispondenze, quali sono inverse, destre o sinistre, di altre, e come sono collegate all'operazione somma $\oplus$ (introdotte le proiezioni di un prodotto cartesiano sui suoi fattori), operazione sulla quale presto torneremo. Insomma, tutta una varietà di concetti che possono contribuire a far familiarizzare gli studenti con la teoria degli insiemi, ed essere facile sorgente di nuove curiose domande, le cui risposte si ottengono grazie all'effettuazione di calcoli abbastanza facili che bisogna imparare a fare se si vuol progredire in un cammino di apprendimento matematico. Per esempio, quanti sono i numeri di Sofia di lunghezza n palindromi? In altre parole, qual è la probabilità che un numero di Sofia di lunghezza n sia palindromo? etc. etc..

Diventa adesso ancora più interessante passare dai numeri di Sofia come stringhe ai numeri di Sofia come numeri naturali. La prima loro proprietà da "scoprire" è che tutti gli elementi di un dato $\Sigma(n)$ hanno lo stesso resto modulo 6, ossia sono tutti congruenti mod 6. Un resto che dipende naturalmente da n secondo il seguente semplice schema ricorrente:

$$\begin{aligned}\Sigma(1) &\equiv 1, \Sigma(2) \equiv -1, \Sigma(3) \equiv 3, \\ \Sigma(4) &\equiv 1, \Sigma(5) \equiv -1, \Sigma(6) \equiv 3, \dots\end{aligned}$$

In altre parole, suddiviso l'insieme di tutti i numeri naturali dispari (e i numeri di Sofia sono tutti dispari), nelle tre progressioni aritmetiche:

$$P(1): 1, 1+6=7, 7+6=13, 13+6=19, \dots$$

$P(2)$: $3, 3+6=9, 9+6=15, 15+6=21, \dots$

$P(3)$: $5, 5+6=11, 11+6=17, 17+6=23, \dots$

si arriva a scoprire che $P(1)$ contiene $\Sigma(1) \cup \Sigma(4) \cup \Sigma(7) \cup \dots$, allo stesso modo che $P(2)$ contiene $\Sigma(3) \cup \Sigma(6) \cup \Sigma(9) \cup \dots$, e $P(3)$ contiene $\Sigma(2) \cup \Sigma(5) \cup \Sigma(8) \cup \dots$. La connessione con il numero 6 farà tornare alla mente le dianzi descritte due famiglie dei numeri anteprimi e postprimi, e si sarà così facilmente stabilito che eventuali numeri di Sofia primi, ossia gli elementi dell'insieme $\Sigma \cap PO = (\Sigma \cap PO(-)) \cup (\Sigma \cap PO(+))$, non possono avere lunghezza che sia un multiplo di 3, e che quindi essi andrebbero ricercati soltanto in $\Sigma \cap PO(-) = \Sigma(2) \cup \Sigma(5) \cup \Sigma(8) \cup \dots$ (anteprimi), oppure in

$\Sigma \cap PO(+) = \Sigma(1) \cup \Sigma(4) \cup \Sigma(7) \cup \dots$ (postprimi).

Tutto ciò illustrato, si potrebbe tornare sull'aspetto "probabilistico" (computazionale) della situazione, ovvero porsi delle domande del tipo:

- quanti numeri di Sofia ci sono per esempio nell'intervallo $S(10)=[1,10]$, o in quello $S(10,100)=[10,100]$?

- la probabilità di trovare un numero di Sofia nell'intervallo $[10,100]$ è maggiore, minore, o uguale, di quella di trovare un numero primo nel medesimo intervallo? (numero primo che sia in PO oppure no)

- in un dato $\Sigma(n)$ (n non multiplo di 3), quanti numeri primi ci sono? E quanti primi gemelli? (si noti che il gemello di un eventuale primo di Sofia non può essere esso stesso un numero di Sofia, e che se il numero primo gemello di Sofia è un antepremo, allora il suo gemello si trova aggiungendo 2, mentre se è un postprimo si trova sottraendo 2).

- E quanti primi di Sofia che siano tali insieme al loro duale, oppure al loro reverse? Quanti primi di Sofia palindromi?

Etc. etc., tante "divertenti" domandine che conducono a tante diverse valutazioni di probabilità.

Un altro *divertissement*²⁹ probabilistico che possiamo fare con i numeri di Sofia è collegato al naturale epimorfismo

$\alpha : \Sigma(n) \rightarrow [0, n]$ (il cui codominio è ancora un segmento iniziale, però di N_0 , non di N) che associa ad ogni numero di Sofia s di lunghezza n il numero $\alpha(s)$ delle sue cifre uguali a 1 (il numero $n - \alpha(s)$ sarà invece evidentemente il numero delle sue cifre uguali a 7). Va notato subito che la funzione α è additiva rispetto alla somma $\oplus$ dianzi definita, $\alpha(s' \oplus s'') = \alpha(s') + \alpha(s'')$. Per le *repunit* sarà allora $\alpha(s) = n$, per le *quasi-repunit* $\alpha(s) = n - 1$, ed in generale otterremo una $(n+1)$ -partizione $\Sigma(n) = \Sigma_0(n) \cup \Sigma_1(n) \cup \dots$, con manifesto significato dei simboli. Notato che detta partizione corrisponde ovviamente a quella di $P(S(n))$ rispetto alla relazione di equivalenza tra sottoinsiemi definita dall'equipotenza, per ogni numero intero k da 0 a n , le cardinalità dei vari insiemi $\Sigma_k(n)$ saranno determinate dai coefficienti binomiali $C(n, k) = |\Sigma_k(n)|$, protagonisti dell'identità aritmetica:

$2^n = C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n)$. Si potranno allora per esempio tra i numeri di Sofia di lunghezza 3 scegliere, in veste di "rappresentanti" rispetto alla relazione di equivalenza indotta da α , i numeri: 111, 117, 177, 777, che potremmo chiamare numeri di Sofia "ridotti", con il vantaggio di essere passati da un in-

²⁹ Il termine non è stato scelto a caso, bensì volutamente, in contrapposizione al concetto di "scuola dell'obbligo". Al contrario, se una scuola rivolta a persone molto giovani non è una "scuola del piacere", dell'interessamento, dell'approfondimento, ha già fallito in partenza il suo compito. Discorso diverso, naturalmente, per "scuole" professionali che vengono scelte in età più avanzata anche per altri tipi di "interesse".

sieme di cardinalità esponenziale 2^n ad un sottoinsieme di cardinalità $(n+1)^{30}$. Tutto ciò conduce a nuove valutazioni di probabilità, tra le quali particolarmente interessante quella che darà risposta alla seguente domanda: estraendo a caso uno dei 2^n numeri di Sofia di lunghezza n , sarà più probabile ottenere uno che abbia $\alpha(s)=0$, oppure $\alpha(s)=1$?, etc., così pervenendo alla naturale constatazione che sono maggiormente probabili i numeri di Sofia che hanno più o meno lo stesso numero di 1 e di 7, ossia $\alpha(s) \sim n/2$. Non sarà pertanto inutile in tale contesto far osservare che un singolo n -numero di Sofia può essere interpretato come il risultato di una sequenza di n consecutivi lanci di una moneta con esito testa o croce, per esempio "leggere" 1771=testa-croce-croce-testa, sicché tanti ulteriori pensieri interessanti e collegamenti potranno sorgere nella mente degli studenti. Per esempio, limitandoci ai numeri di Sofia di lunghezza pari $n=2k$, potremmo chiamare "perfetti" quei numeri s tali che $\alpha(s)=k$, e far notare non solo che ogni numero di Sofia del tipo $s \oplus \delta(s)$ è un numero di Sofia perfetto (di lunghezza $2n$), ma pure che se si prende la somma $\oplus$ di tutti i numeri di Sofia di detta lunghezza n , si ottiene senz'altro un numero di Sofia perfetto di lunghezza $n \times 2^n$. *Idem* se si considerano soltanto i numeri di Sofia ridotti, ottenendo così un numero perfetto di lunghezza però assai minore, $n(n+1)$. Possiamo domandarci adesso: quale probabilità c'è che un nume-

³⁰ I numeri di Sofia ridotti di lunghezza n sono chiaramente tanti quanti le decomposizioni ordinate additive di n . Può essere utile pure far notare che ogni numero di Sofia si ottiene da uno ridotto "permutando" le cifre 1 e 7, circostanza che potrebbe condurre a qualche considerazione sul concetto di azione di un gruppo su un insieme, nel presente caso naturalmente il gruppo delle permutazioni su n elementi

ro di Sofia di lunghezza 2k sia perfetto? E quale che sia ridotto? o che sia primo? (continuando in tal modo a "giocare" con la doppia interpretazione dei numeri di Sofia, quali semplici stringhe oppure numeri naturali veri e propri). E come cambiano tali probabilità se consideriamo soltanto numeri di Sofia in qualche speciale sottoinsieme notevole di essi? (quelli che cominciano per 1, o finiscono per 7, etc. etc.) Molteplici "curiosità" di cui talvolta non si potrà conoscere la risposta generale, ma in casi particolari sì.

Osserviamo infine che, attraverso tutte le accennate valutazioni di probabilità, ci si sarà resi conto che i numeri di Sofia sono relativamente "pochi" (in termini avanzati, densità di Schnirelmann uguale a 0), e che si potrebbe anche "scoprire" che essi sono addirittura molti **meno** dei numeri primi³¹. Eppure, tra di loro appaiono con notevole frequenza dei numeri primi, e talvolta perfino in proporzione **superiore** a quella che ci si aspetterebbe. Per non dire dei numeri primi gemelli, che si trovano alquanto spesso tra i numeri di Sofia³², il che con-

³¹ Un'affermazione questa seconda più difficile da dimostrare della prima, comunque un corollario del PNT dianzi richiamato, e quindi come tale non del tutto fuori portata, almeno in una classe liceale.

³² Il più "lungo" che abbiamo finora trovato è una *quasi-repunit* gemella ... impresentabile, di lunghezza 2075, costituita da 411 cifre 1, poi un 7, ed infine ancora un 1 per altre 1663 volte, con notazione dappositamente inventata per l'occasione: [1x411][7][1x1663]. Più presentabile sarebbe stata un'analogo *quasi-repunit* di lunghezza 449: [1x269][7][1x179], ma ci piace mostrare qui un'altra *quasi-repunit* gemella di lunghezza 58, con il 7 al 48mo posto:

1111111111111111111111111111111111111111171111111111.

Ecco invece un numero di Sofia di lunghezza 28 perfetto che e' anche un primo gemello,: 111111117177777717177717771. Abbiamo riportato volutamente tali numeri in questo modo allo scopo di far comprendere appieno

duce a varie "congetture" confortate dalle interessanti tabelle numeriche presenti in rete³³, che contemplano numeri naturali di lunghezza fino a 28, tavole facili da compilare nei primi casi, comunque di agevole lettura e comprensione in quelli successivi. Con esse chiudiamo le nostre argomentazioni, nella speranza che esse possano essere state trovate suggestive almeno da qualche lettore.

la terribilità dell'infinito numerabile (figurarsi quella del continuo, infinito potenziale vs infinito attuale, si sarebbe detto in altri tempi), e la sua alienità dalla mente umana. Gli antichi parlarono di horror vacui per descrivere una Natura che aborre il vuoto, qui potremmo forse parlare di horror immensitatis, e quindi pronunciare le stesse parole della principessa Rezia di fronte all'indifferente maestosità dell'oceano (nella bella opera *Oberon* di Carl Maria von Weber): "*Ozean! Du ungeheuer!*".

³³ Umberto Bartocci - Alessandro Miotto, *Introducing Sofia Numbers and New Conjectures on Primes*, 2025, <http://viXra.org/abs/2512.0089>

70 anni di Intelligenza Artificiale

Cos'è - Come funziona - Limiti - Rischi

a cura di
Luca Nicotra



Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence, 1956.

Contributi di:

Luca Nicotra, Pierluigi Assogna, Paolo Severino Manca,
Luigi Campanella, Giordano Bruno, Ezio Sciarra,
Duilio Carpitella, Armando Guidoni, Leonardo Maria Rocca,
Carmela Silvia Messina, Mariangela Vanalli, Andrea Manzo,
Vincenzo Luca Messina, Violetta Chiarini.

numero

16

in riga
edizioni 
Tecnologia
e innovazione

Dalla distanza di un punto da una retta nello spazio al prodotto vettoriale

Un percorso didattico per introdurre le componenti cartesiane del prodotto vettoriale

Andrea Battocchio*

*Liceo Statale “Primo Levi” di San Donato Milanese;
andrea.battocchio@levi.edu.it



DOI : 10.53159/PdM(IV).v7n3.164

Sunto: *Il prodotto vettoriale è uno strumento fondamentale della matematica e della fisica, ma la sua introduzione didattica risulta spesso artificiale, ridotta a regole di calcolo basate sul determinante di una matrice. In questo contributo si propone un approccio alternativo per motivare la costruzione delle componenti cartesiane del prodotto vettoriale a partire da un problema concreto di geometria analitica. Dopo aver discusso i metodi classici di calcolo per la distanza di un punto da una retta nello spazio tridimensionale, si mostra come accostando ad essi il significato geometrico del prodotto vettoriale, le sue componenti e l'anticommutatività possano emergere in maniera naturale.*

Parole Chiave: *Geometria analitica dello spazio, prodotto vettoriale, componenti cartesiane, didattica della matematica*

Abstract: *The cross product is a fundamental tool in mathematics and physics, yet its didactic introduction often appears artificial, reduced to computational rules based on the determinant of a matrix. In this work, an alternative approach is proposed to motivate the construction of the Cartesian components of the crossproduct, starting from a concrete problem in analytical geometry. After discussing classical methods for calculating the distance from a point to a line in three-dimensional space, it is shown how, by relating these methods to the geometric meaning of the cross product, its components and anticommutativity can be naturally derived.*

Keywords: *Analytical geometry in three-dimensional space, cross product, Cartesian components, Mathematics education*

1 -Introduzione

Il prodotto vettoriale è uno strumento chiave per descrivere fenomeni geometrici e fisici nello spazio tridimensionale. Secondo le *Indicazioni Nazionali* per i licei scientifici, già nel biennio gli studenti dovrebbero affrontare in matematica “i concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio, nonché gli elementi del calcolo matriciale”;¹ inoltre, è richiesto di approfondire “la comprensione del ruolo fondamentale che i concetti dell’algebra vettoriale e matriciale hanno nella fisica”.

¹«Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all’articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all’articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento.» (2010).

Seguendo la definizione comunemente adottata il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un vettore $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ tale che

- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$, dove θ è l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$
 - $\vec{c}$ è ortogonale sia a $\vec{a}$ sia a $\vec{b}$
 - $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ formano una terna destrorsa
- (1)

In fisica, il concetto di prodotto vettoriale viene introdotto relativamente presto, ma nella pratica didattica si considera per lo più il suo modulo, come nel caso del momento di una forza: sia $\vec{F}$ una forza applicata su un punto P di un corpo imperniato in un punto fisso O, il momento della forza rispetto a O è

$$\vec{M} = \vec{OP} \times \vec{F} \quad \text{con} \quad |\vec{M}| = |\vec{OP}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \theta$$

dove θ è l'angolo tra $\vec{OP}$ e $\vec{F}$.

Con una simile definizione di momento (si vedano ad esempio Parodi et al. 2006; Amaldi 2007; Caforio e Ferilli 2012; Cutnell et al. 2023) è difficile rendere conto della direzione e del verso di $\vec{M}$ e a maggior ragione della non commutatività del prodotto vettoriale.

Se la direzione e il verso di $\vec{M}$ non sono essenziali per gli obiettivi del biennio, cioè verificare l'equilibrio di un corpo rispetto alla rotazione ed eventualmente determinare la sua velocità e accelerazione angolare,² essi diventano importanti in altre applicazioni come, ad esempio, la forza di Lorentz. In elettromagnetismo si fa quindi ampio uso della regola della mano destra per individuare la direzione e il verso del prodotto vettoriale. Tuttavia rimane difficile la rappresentazione corretta del vettore risultante, soprattutto se i due vettori coinvolti nel prodotto vettoriale non sono perpendicolari.

²Ivi, 342.

Nelle classi più avanzate il prodotto vettoriale è esplicitato anche nelle sue componenti facendo ricorso, per la loro memorizzazione, ad una formula basata sul calcolo del determinante della matrice composta dai versori del sistema cartesiano e dalle componenti dei due vettori (Martelli 2023): dati i vettori $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ e $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ il loro prodotto vettoriale si calcola come

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \quad (2)$$

$$(a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

Questa presentazione, pur efficace sul piano operativo, rischia di apparire agli studenti come un procedimento meccanico, scarsamente giustificato dal punto di vista geometrico.

In questo articolo si propone un percorso alternativo per motivare la costruzione delle componenti cartesiane del vettore risultante di un prodotto vettoriale.

Lo schema di lezione è pensato per una quarta liceo scientifico, classe dove si affronta la geometria analitica dello spazio,³ in maniera propedeutica all'utilizzo del prodotto vettoriale in elettromagnetismo. È infatti proprio da un problema geometrico concreto, quello di determinare la distanza di un punto da una retta nello spazio tridimensionale, che si può trarre lo spunto per mostrare come la sua soluzione conduca in modo naturale alla scrittura delle componenti del prodotto vettoriale.

³Ivi, 340

2 -Distanza punto-retta nello spazio

La distanza di un punto da una retta nello spazio tridimensionale è generalmente presentata nei libri di testo in forma di esercizio, ma non è mai ricavata una formula esplicita, come nel caso bidimensionale, partendo da condizioni generiche.

In due dimensioni, dato il punto $P(p, q)$ e la retta r di equazione $ax + by + c = 0$, la distanza di P da r si calcola con la formula

$$d(P, r) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

In tre dimensioni, dato un punto $P(p, q, r)$ e una retta r passante per il punto $A(a, b, c)$ con direzione $\vec{v} = (l, m, n)$, avente quindi equazione parametrica

$$r: \begin{cases} x = a + lt \\ y = b + mt \\ z = c + nt \end{cases}$$

la distanza di P da r può essere calcolata in diversi modi, di seguito alcuni esempi.

2.1 - Primo metodo

In un primo modo si trova il piano passante per P perpendicolare a r , si interseca il piano con la retta in modo da trovare il punto H , appartenente a r , che ha distanza minima da P e poi si calcola la distanza $\overline{PH}$ (Sasso e Zannone 2020, 581).

Il piano perpendicolare a r e passante per P ha equazione

$$l(x - p) + m(y - q) + n(z - r) = 0$$

intersecando il piano con r , l'equazione diventa

$$l(a + lt - p) + m(b + mt - q) + n(c + nt - r) = 0$$

e risolvendo in funzione di t si trova:

$$t = \frac{lp + mq + nr - al - bm - cn}{l^2 + m^2 + n^2} \quad (3)$$

da sostituire nella formula per il calcolo di $\overline{PH}$:

$$\overline{PH} = \sqrt{((a + lt) - p)^2 + ((b + mt) - q)^2 + ((c + nt) - r)^2} \quad (4)$$

2.2 - Secondo metodo

Un altro modo è considerare un punto generico H appartenente alla retta r , imporre che $\overline{PH}$ sia perpendicolare alla retta r e poi calcolare la distanza $\overline{PH}$ (Antoniali 2017).

Sia H un punto generico della retta r , avente quindi coordinate $(a + lt, b + mt, c + nt)$. Affinchè $\overline{PH}$ sia perpendicolare a r , il vettore

$$\overrightarrow{PH} = \begin{pmatrix} a + lt - p \\ b + mt - q \\ c + nt - r \end{pmatrix}$$

deve essere ortogonale a $\vec{v}$:

$$(a + lt - p) \cdot l + (b + mt - q) \cdot m + (c + nt - r) \cdot n = 0$$

e risolvendo in funzione di t si trova ancora la (3) da sostituire nella (4).

2.3 - Terzo metodo

Un terzo modo è considerare un generico punto H appartenente alla retta r , calcolare la distanza $\overline{PH}$ e imporre che sia quella di misura minima (Savo 2010, pt. 11).

La distanza $\overline{PH}$ è data dalla (4), sviluppando l'espressione sotto radice si ottiene un trinomio di secondo grado:

$$t^2(l^2 + m^2 + n^2) + 2t(al + bm + cn - lp - mq - nr) + (b - q)^2 + (a - p)^2 + (r - c)^2$$

che ha il suo valore minimo⁴ in corrispondenza del valore di t dato dalla (3).

2.4 - Formula analitica per la distanza punto-retta nello spazio

In tutti tre i modi si giunge al valore di t dato dalla (3) da sostituire nella (4). Svolgendo i relativi calcoli si ottiene una lunga espressione con trenta termini sotto radice che opportunamente raccolti si riducono a

⁴Per trovare il valore minimo si può osservare che il trinomio rappresenta una parabola con il coefficiente di secondo grado sempre positivo e quindi il valore minimo si trova in corrispondenza del vertice della parabola, oppure si può calcolare la derivata dell'espressione in funzione di t e porla uguale a zero.

$$\overline{PH} = \sqrt{\frac{(p-a)^2(m^2+n^2)+(q-b)^2(l^2+n^2)+(r-c)^2(l^2+m^2)+-2(lm(p-a)(q-b)+mn(q-b)(r-c)+ln(p-a)(r-c))}{l^2+m^2+n^2}} \quad (5)$$

Raccogliendo ulteriormente i termini quadratici si arriva ad una formula analitica compatta per la distanza del punto P dalla retta r nello spazio:

$$d(P, r) = \sqrt{\frac{(l(q-b)-m(p-a))^2+(m(r-c)-n(q-b))^2+(l(r-c)-n(p-a))^2}{l^2+m^2+n^2}} \quad (6)$$

Dalla lunghezza e dalla complessità mnemonica della (6) è abbastanza evidente il motivo per cui nei libri di testo non è mai ricavata esplicitamente nella sua forma generale, come l'omologa in due dimensioni. Il calcolo della distanza punto-retta nello spazio, infatti, viene quasi sempre proposto in forma di esercizio per casi particolari, da risolvere con uno dei metodi indicati.

2.5 -Prodotto vettoriale come area del parallelogramma

Attraverso un approccio più "sintetico", si perviene ad un'altra formula molto più semplice per il calcolo della distanza di un punto da una retta nello spazio che contiene un prodotto vettoriale (Martelli 2023, 288).

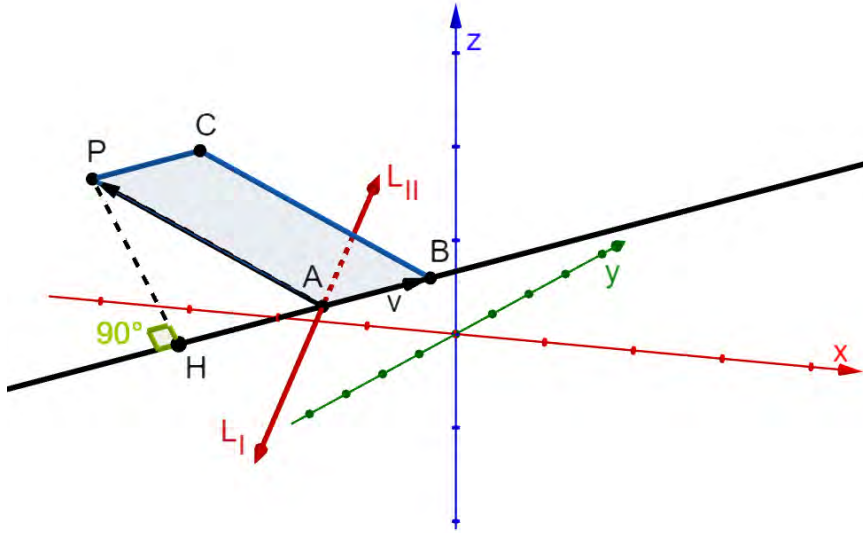


Fig. 1

In figura 1 la distanza $\overline{PH}$ è l'altezza del parallelogramma $PABC$, dove B è il punto di arrivo del vettore $\vec{v}$ applicato al punto A e C il quarto vertice.

L'area del parallelogramma è

$$Area_{PABC} = \overline{AB} \cdot \overline{PH} = \overline{AB} \cdot \overline{AP} \cdot \sin \widehat{PAB}$$

Ricordando dalla definizione (1) che

$$|\overline{AB} \times \overline{AP}| = \overline{AB} \cdot \overline{AP} \cdot \sin \widehat{PAB}$$

si trova che la distanza $\overline{PH}$ è

$$\overline{PH} = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AP}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\vec{v} \times \overline{AP}|}{|\vec{v}|} \quad (7)$$

3 -Le componenti del prodotto vettoriale

Se si confrontano le due espressioni della distanza $\overline{PH}$ (6) e (7), si osserva che hanno lo stesso denominatore, poichè $|\vec{v}| = \text{chè}|\vec{v}| = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$, e il numeratore della (6), in quanto somma di tre quadrati sotto il segno di radice quadrata, può essere interpretato come il modulo di un vettore, così come lo è il numeratore della (7). Uguagliando i risultati della (6) e della (7) si ha

$$|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{\frac{(l(q-b)-m(p-a))^2 + (m(r-c)-n(q-b))^2 + (l(r-c)-n(p-a))^2}{l^2 + m^2 + n^2}} \quad (8)$$

Chiamato $\vec{L}$ il vettore risultante del prodotto vettoriale di $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AP}$, è possibile risalire alle sue componenti cartesiane L_x , L_y e L_z . Queste infatti sono individuabili nelle espressioni elevate al quadrato sotto il segno di radice; pertanto possono essere:⁵

$$\begin{aligned} l(q-b) - m(p-a) & \quad \text{oppure} \quad m(p-a) - l(q-b) \\ m(r-c) - n(q-b) & \quad \text{oppure} \quad n(q-b) - m(r-c) \\ l(r-c) - n(p-a) & \quad \text{oppure} \quad n(p-a) - l(r-c) \end{aligned}$$

Le possibili combinazioni per assegnare una terna di queste espressioni al vettore $\vec{L}$ sono 48.⁶ Per scegliere l'espressione corretta corrispondente ad ogni componente cartesiana biso-

⁵La molteplicità delle possibili espressioni deriva dal fatto che, nel passaggio dalla (5) alla (6), il raccoglimento in quadrato di ciascun termine nella (6) può essere effettuato in due modi distinti, semplicemente invertendo il segno del binomio, senza modificare il risultato finale.

⁶ 48 deriva da $3! = 6$ disposizioni delle prime tre espressioni, ciascuna moltiplicata per $2^3 = 8$ varianti per le tre coppie di espressioni alternative.

gna tenere presente che $\vec{L}$, per la definizione (1) di prodotto vettoriale, deve essere ortogonale sia a $\vec{v}$ sia a $\overrightarrow{AP}$. La condizione di ortogonalità impone che la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti lungo x , y e z sia nullo.

Le uniche due terne compatibili sono:⁷

$$\begin{cases} L_{Ix} = m(r - c) - n(q - b) \\ L_{Iy} = n(p - a) - l(r - c) \\ L_{Iz} = l(q - b) - m(p - a) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} L_{IIx} = n(q - b) - m(r - c) \\ L_{IIy} = l(r - c) - n(p - a) \\ L_{IIz} = m(p - a) - l(q - b) \end{cases}$$

si può quindi affermare che i due vettori

$$\vec{L}_I = \begin{pmatrix} m(r - c) - n(q - b) \\ n(p - a) - l(r - c) \\ l(q - b) - m(p - a) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{L}_{II} = \begin{pmatrix} n(q - b) - m(r - c) \\ l(r - c) - n(p - a) \\ m(p - a) - l(q - b) \end{pmatrix}$$

rappresentano entrambi il prodotto vettoriale di $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AP}$.

Come è facile verificare, $\vec{L}_I$ e $\vec{L}_{II}$, uguali in direzione e modulo per costruzione, differiscono tra loro solo per il segno:

⁷La verifica dell'ortogonalità tra tutte le 48 possibili terne di componenti è laboriosa ma semplice da eseguire, si può pensare di assegnare ad ogni studente della classe una o più specifiche combinazioni.

L'ortogonalità di $\vec{L}$ e $\vec{v} = (l, m, n)$ si esprime verificando che

$$\begin{aligned} (m(r - c) - n(q - b)) \cdot l + (n(p - a) - l(r - c)) \cdot m + (l(q - b) - m(p - a)) \cdot n = 0 \\ (n(q - b) - m(r - c)) \cdot l + (l(r - c) - n(p - a)) \cdot m \\ + (m(p - a) - l(q - b)) \cdot n = 0 \end{aligned}$$

mentre l'ortogonalità di $\vec{L}$ e $\overrightarrow{AP} = (p - a, q - b, r - c)$ verificando che

$$\begin{aligned} \bullet (m(r - c) - n(q - b)) \cdot (p - a) + (n(p - a) - l(r - c)) \cdot (q - b) + \\ (l(q - b) - m(p - a)) \cdot (r - c) = 0 \\ \bullet (n(q - b) - m(r - c)) \cdot (p - a) + (l(r - c) - n(p - a)) \cdot (q - b) + \\ (m(p - a) - l(q - b)) \cdot (r - c) = 0 \end{aligned}$$

$\vec{L}_I = -\vec{L}_{II}$, hanno quindi versi opposti lungo la medesima direzione.

L'attribuzione del verso a ciascuno dei due vettori è puramente convenzionale. Solitamente la scelta è fatta in coerenza con il sistema cartesiano di riferimento xyz adottato, che a sua volta è solitamente destrorso, cioè segue la regola della mano destra. Siano $\hat{i}$ e $\hat{j}$ i versori degli assi cartesiani x e y , se si posiziona l'indice della mano destra come $\hat{i}$ e il medio come $\hat{j}$, il verso del versore $\hat{k}$ dell'asse z corrisponde al pollice.

In questo sistema di riferimento, associando $\vec{v}$ all'indice della mano destra e $\vec{AP}$ al medio, il verso del loro prodotto vettoriale, individuato dal pollice, sarà opposto a quello che si ottiene associando all'indice $\vec{AP}$ e al medio $\vec{v}$. In altre parole il prodotto vettoriale non è commutativo ma dipende dall'ordine dei vettori e poiché i vettori risultanti differiscono solo per il segno, il prodotto vettoriale è anticommutativo:

$$\vec{v} \times \vec{AP} = -(\vec{AP} \times \vec{v})$$

L_I e L_{II} sono quindi rispettivamente $\vec{v} \times \vec{AP}$ e $\vec{AP} \times \vec{v}$.

Generalizzando il risultato ottenuto, siano $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ e $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ due vettori nello spazio tridimensionale, le componenti dei prodotti vettoriali $\vec{a} \times \vec{b}$ e $\vec{b} \times \vec{a}$ sono così determinate:

$$\begin{cases} (\vec{a} \times \vec{b})_x = a_y b_z - a_z b_y \\ (\vec{a} \times \vec{b})_y = a_z b_x - a_x b_z \\ (\vec{a} \times \vec{b})_z = a_x b_y - a_y b_x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (\vec{b} \times \vec{a})_x = b_y a_z - b_z a_y \\ (\vec{b} \times \vec{a})_y = b_z a_x - b_x a_z \\ (\vec{b} \times \vec{a})_z = b_x a_y - b_y a_x \end{cases}$$

Per ricordare più agevolmente lo sviluppo delle componenti cartesiane, si usa spesso la (2), che rappresenta comunque

solo un metodo operativo di memorizzazione, tramite il determinante della matrice formata nella prima riga dai tre versori del sistema cartesiano $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ e nelle altre due righe dalle componenti dei due vettori nell'ordine del prodotto:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{b} \times \vec{a} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}$$

4 - Conclusione

Il percorso proposto mostra come un problema concreto di geometria analitica, poco conosciuto agli studenti nella sua formulazione generale, come la determinazione della distanza di un punto da una retta nello spazio tridimensionale, possa costituire uno spunto naturale per introdurre il prodotto vettoriale e giustificare le componenti cartesiane. Questo approccio consente agli studenti di comprendere meglio il significato geometrico e fisico del prodotto vettoriale, evitando la percezione di una formula astratta e memorizzata meccanicamente.

La proposta didattica si inserisce inoltre coerentemente dal punto di vista temporale, perché si colloca tra la geometria analitica dello spazio, in programma al quarto anno, e le applicazioni fisiche del prodotto vettoriale, anch'esse in programma alla fine del quarto o all'inizio del quinto anno.

Bibliografia

AMALDI Ugo.(2007). *La Fisica di Amaldi. Vol. 1*,Bologna: Zanichelli.

ANTONIALI Fabio Maria. (2017). «Appunti di geometria analitica dello spazio». Firenze.

https://el.unifi.it/pluginfile.php/841197/mod_resource/content/0/geoanalitica3D.pdf.

CAFORIO Antonio , FERILLI Aldo. (2012). *Fisica! Le leggi della natura. Vol.3*,Firenze: Le Monnier scuola.

CUTNELL, J. D., JOHNSON K. W., YOUNG D., STADLER S. . (2023). *La fisica di Cutnell e Johnson*. Bologna: Zanichelli.

MARTELLI Bruno. (2023). *Geometria e algebra lineare*. Pisa.
<https://people.dm.unipi.it/martelli/Alg%20Lin.pdf>.

PARODI, G.P., OSTILI M., MOCHI ONORI . G. (2006). *L'evoluzione della fisica. Vol. 1*,Milano: Paravia.

SASSO Leonardo, ZANNONE Claudio. (2020). *Colori della matematica*. 4 beta,Novara: De Agostini.

SAVO Alessandro. (2010). «Appunti del Corso di Geometria». Roma.

<https://www.sbai.uniroma1.it/~alessandro.savo/Parte11.pdf>

Zenone, replicanti e gnomoni

Un' introduzione al mondo frattale

Giorgio Pietrocola *

*APAV; giorgio.pietrocola@gmail.com



DOI : 10.53159/PdM(IV).v7n3.165

Sunto: *Dopo aver introdotto l'autosimilarità con l'effetto Droste, si affronta il paradosso dello stadio di Zenone, in cui l'argomentazione del filosofo porta a considerare una particolare somma infinita e a riflettere sulle problematiche matematiche, storiche e filosofiche connesse. Vengono mostrati due poligoni e due curve frattali con le stesse proprietà replicanti del segmento. Si mostra poi come il setaccio di Apollonio sia un diverso caso di scomposizione di una figura in infinite copie di se stessa. Si evidenzia l'analogia con moderne figure frattali. Infine si considera la definizione di gnomone, data da Erone, evidenziando l'autosimilarità implicita con esempi, anche grafici, che infine conducono al motto storico "eadem mutata resurgo" e alla sua curva ispiratrice.*

Parole Chiave: *Infinito potenziale. Infinito attuale, Autosimilarità. Figura replicante. Limiti. Frattali, Curve di Koch. Falena. Siamese. Paradosso dello stadio di Zenone. Setaccio di Apollonio. Gnomone secondo Erone. Eadem mutata resurgo. Spirale logaritmica.*

Abstract: *After introducing self-similarity with the Droste effect, the Zeno stage paradox is addressed, in which the philosopher's argument leads one to consider a particular infinite sum and reflect on the mathematical, historical and*

philosophical issues involved. Two polygons and two fractal curves with the same replicating properties as the segment are shown. It is then shown how the Apollonian gasket is a different case of the decomposition of a figure into infinite copies of itself. The analogy with modern fractal figures is highlighted. Finally, the definition of gnomon given by Heron is considered, highlighting the implied self-similarity with examples, including graphs, that finally lead to the historical motto "eadem mutata resurgo" and its inspiring curve.

Keywords: Potential infinity. Current infinity. Self similarity. Rep-tile. Fractals, Koch curves: Siamese, Moth. Zeno's stage paradox. Apollonian gasket. Gnomon according to Heron. Eadem mutata resurgo. Logarithmic spiral.

1 - Introduzione

L'autosomiglianza è la proprietà di un oggetto del nostro mondo fisico o di una figura geometrica di somigliare a una sua parte come un sasso assomiglia a un suo frammento o un albero a un suo ramo. Somiglianza è un concetto vago che si può tentare di definire in modo rigoroso, per esempio statisticamente, ma che ora preferiamo ignorare limitandoci solo a quella particolare somiglianza che in geometria si chiama similitudine e che, in sostanza, mantiene la forma pur nelle mutate dimensioni. Limiteremo perciò la nostra attenzione all'autosimilarità, cioè, alla proprietà di una figura di essere una copia in miniatura di almeno una sua parte propria, che quindi ripropone la forma originale, sia pure su scala ridotta.

2 – Autosimilarità nell'effetto Droste

Iniziamo quindi questo itinerario divulgativo dall'effetto Droste. Questo prende il nome da una vecchia pubblicità di cacao olandese. Il contenitore del cacao riporta l'immagine di una suora che porta un vassoio contenente una tazza e un contenitore con la stessa immagine della suora con il vassoio. Idealmente, superando i limiti risolutivi della grafica utilizzata per la confezione, il disegno causa un moltiplicarsi all'infinito di immagini sempre più piccole che tendono ad accumularsi in un punto della scatola. In figura 1 si può vedere questo effetto applicato a un setaccio di Apollonio (Pietrocola, 2014). Il punto di accumulazione estremo in basso nella seconda figura, sulla circonferenza massima, ha la proprietà di contenere infinite copie in miniatura dell'intero disegno in qualsiasi zona circostante si voglia considerare.

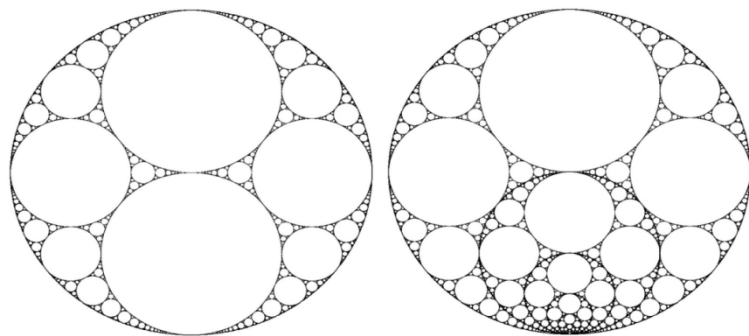


Fig. 1 - A sinistra un setaccio di Apollonio, un cerchio contenente altri cerchi reciprocamente tangenti. A destra l'effetto Droste ottenuto inserendo in un cerchio della precedente figura una copia ridotta della stessa e ripetedoricorsivamente ilprocedimento all'infinito

3 – Zenone di Elea

Zenone (489-431 a.C.), definito da Ludovico Geymonat (1908-1991) ingegno acuto, sottile e vigorosamente polemico, fu allievo di Parmenide nella scuola filosofica di Elea. Come il suo maestro era convinto che la realtà fosse una e immutabile e che il movimento fosse solo una nostra illusione (Geymonat, 1981, pp.40-58) . L'idea può sembrare bizzarra e, forse, così ai più è apparsa per millenni. Per noi moderni però dovrebbe esserlo un po' meno dato che ci siamo ormai abituati alla realtà dell'illusione cinematografica del movimento. Comunque il problema è che il filosofo non si limita a credere, ma dimostra la sua tesi con metodo matematico. Utilizza la tecnica della dimostrazioni per assurdo. In alcuni dei suoi paradossi, Zenone inizia ipotizzando la realtà del movimento, da questa ammissione deduce una catena interminabile di eventi, del tutto simili tra loro, ma su scala sempre più ridotta e questa interminabilità lo porta a rifiutare l'ipotesi iniziale a favore della sua negazione.

Nel famoso “paradosso dello stadio”, per esempio, Zenone dimostra l'impossibilità di traversare un segmento. Per gli antichi greci lo spazio della geometria euclidea non era un modello matematico che poteva adattarsi o meno al nostro mondo fisico, ma si identificava con esso. La geometria, come ci ricorda ancora il suo nome, in origine, misurava la terra. La lunghezza dello stadio diventa quindi un oggetto geometrico apparentemente semplice, ma problematico: il segmento. Se si potesse percorrere un segmento - sostiene Zenone - prima si dovrebbe raggiungere la sua metà. A questo punto però ci si troverebbe di fronte a un nuovo segmento residuo, più piccolo, ma simile al precedente, e si dovrebbe quindi

raggiungerne di nuovo la sua metà. Per effetto Droste la procedura indicata si dovrebbe ripetere ricorsivamente in un numero interminabile di eventi perché ogni segmento residuo, per quanto piccolo, avrà la sua metà.

4 – Una somma interminabile

Il paradosso dello stadio evoca in noi una somma di infiniti termini. Infatti, se l'unità di spazio è la lunghezza dello stadio la somma in questione è: $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$. Gli addendi sempre più piccoli che si susseguono sono tali che il successivo è sempre metà del precedente per cui il rapporto tra due consecutivi, detto ragione della progressione geometrica, è invariante e vale $r=1/2$. Si tratta di una cosiddetta serie geometrica composta da infiniti termini in progressione geometrica. Per evidenziare questa sua caratteristica di invarianza, una serie di questo tipo la chiameremo anche proporzionale.

In figura 2, una spirale proporzionale (Pietrocola, 2023a), con lo stesso rapporto della serie di cui stiamo parlando, suddivide il segmento in infinite parti simili, sempre più prossime all'irraggiungibile polo della spirale posto a fine segmento. Zenone, come in generale la cultura greca antica, concepiva solo l'infinito potenziale. Che quella somma avesse infiniti addendi significava solo che si poteva continuare ad aggiungerne quanti si vuole anche se a un certo punto si presumeva di dover terminare inevitabilmente con un risultato incompleto. Impossibile quindi, da questo punto di vista, terminare la somma ottenendo un risultato unico.

In questa visione, sommare tutti quegli addendi è un'impresa impossibile per cui quella somma non ha risultato.

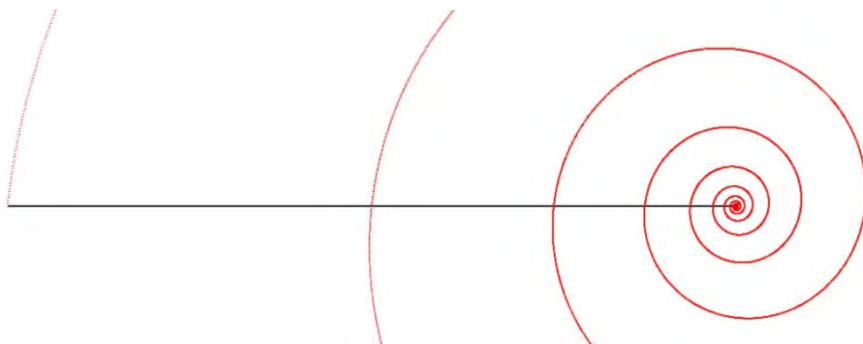


Fig. 2- Nel paradosso dello stadio si scompone il segmento in infiniti segmenti con taglie proporzionali ogni volta dimezzate. Una spirale proporzionale, da sinistra, segna i punti di partenza di ogni tratto. Il polo della spirale, irraggiungibile, è alla fine del segmento (stadio) in prossimità del quale si accumulano infiniti segmenti sempre più piccoli.

5 – Come terminiamo l'interminabile

Oggi noi tutti, raramente consapevoli del dilemma storico e filosofico sottostante, accettiamo senza problemi l'infinito attuale la cui realtà era stata negata esplicitamente dal grande filosofo Aristotele, ma i cui frutti copiosi già il grande matematico Archimede aveva cominciato a cogliere. Alla somma di Zenone, composta da infiniti addendi, oggi assegniamo un risultato preciso, il numero uno, irraggiungibile da un numero finito di addendi, ma a cui però, aumentando il numero degli stessi, possiamo andare vicini quanto vogliamo. In altre parole imponiamo il limite a cui tende la somma come risultato, scavalcando così, con

moderna disinvoltura, le difficoltà concettuali che abbiamo visto. L'analisi matematica, un ramo della matematica sviluppato negli ultimi secoli che credo debba riconoscenza al pensiero di Zenone, si è assunta il non facile compito di rendere rigoroso questo modo intuitivo di procedere.

Ecco come oggi calcoliamo il risultato di una successione infinita di numeri proporzionali, cioè in progressione geometrica con un rapporto invariante tra due termini consecutivi nell'ipotesi che questo sia positivo e minore di uno. Indicheremo con r tale rapporto costante usando l'iniziale di ragione, nome con cui viene comunemente indicato questo quoziente invariante.

Partiamo dal caso di una somma con un numero finito di addendi. È facile dimostrare la seguente identità:

$$1+r+r^2+r^3+r^4+\dots+r^{n-1}=(1-r^n)/(1-r)$$

Per verificarla, come in tutte le divisioni, basta moltiplicare il divisore, il binomio $1-r$, per il quoziente, il polinomio di grado $n-1$ che rappresenta una generica somma di n termini in progressione geometrica di ragione r iniziante da 1. Nel fare questa operazione, per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma, il polinomio quoziente si moltiplica prima per 1 poi per $-r$. Si sommano poi i monomi simili osservando il cosiddetto "effetto telescopico" in quanto si annullano quasi tutti i monomi con quelli di segno opposto. Alla fine rimangono solo due monomi formanti il binomio $1-r^n$ che conferma quindi l'identità in questione. Dato che facendo crescere n , il monomio r^n può approssimarsi a piacere a 0 (ricordare che $0 < r < 1$), nel caso della somma con infiniti termini si considera esattamente 0 il che rende la formula precedente più semplice:

$$1+r+r^2+r^3+r^4+\dots=1/(1-r)$$

Nel caso $r=1/2$ si trova il risultato 2. Sottraendo il primo addendo si trova che la somma di Zenone dà per risultato esattamente 1. Questo risultato in fin dei conti, sia pure potenzialmente, era già contenuto nell'argomentazione di Zenone, dato che il segmento iniziale è scomposto in una infinita serie geometrica di segmenti simili, consecutivi decrescenti secondo un rapporto costante.

Esistono altre figure geometriche con la stessa proprietà del segmento zenoniano?

6- Figure replicanti di ordine due

Sì, non sono molte, ma esistono altre figure "rep-2" che si possono scindere in due parti uguali ognuna copia ridotta dell'originale. Notare che, ripetendo il procedimento di suddivisione di un rep-2 nelle due parti ottenute, si ottiene sempre un rep-4, continuando un rep-8 e così via. L'inverso però può non valere perché il quadrato è evidentemente un rep-4, ma non un rep-2, dato che non c'è alcun modo di unire due quadrati per formare un altro quadrato. Distingueremo dicendo che mentre il segmento è una figura replicante di ordine 2, il quadrato è una figura replicante di ordine 4.

Nel piano ci sono due poligoni replicanti di ordine 2 che dovrebbero essere familiari al lettore. Li vedremo anche per confermare intuitivamente la convergenza verso uno della somma di Zenone. Il primo poligono è il mezzo quadrato cioè il triangolo rettangolo isoscele. Il secondo è un rettangolo speciale a cui ho proposto il nome di "gnomonico" (Pietrocola 2022) con la stessa forma del foglio di formato A4 usato

comunemente per le nostre stampanti che ha il rapporto tra lato maggiore e minore uguale alla radice di due. Lo stesso rapporto che troviamo tra ipotenusa e cateto nel primo caso.

A quanto si sa, se il rettangolo gnomonico si generalizza a un parallelogramma con lo stesso rapporto tra i lati, questi sono gli unici poligoni rep-2 (Gardner 1996).

In figura 3 i due poligoni sono stati scomposti in due parti uguali. Una delle due parti viene poi scomposta a sua volta, reiterando il procedimento all'infinito. Ciò crea, in entrambi i casi, una serie geometrica di figure simili, sempre più piccole, con area metà della precedente, che si accumulano all'infinito in un particolare punto. Anche nel segmento zenoniano c'è un punto dove si accumulano infiniti segmenti, sempre più piccoli. È posto proprio alla fine del segmento, in quel traguardo prossimo, ma che la procedura ricorsiva ideata da Zenone non raggiungerà mai. Scegliendo per unità, in ognuno dei due casi, l'area della figura contenente tutte le altre, ritroviamo la nostra somma zenoniana:

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots = 1$$

I punti di accumulazione delle figure, frantumate in copie sempre più piccole di se stesse, formano una sorta di "occhio di dio", dove l'occhio umano si perde quasi subito senza riuscire a cogliere il persistente difetto di riempimento che solo la mente può constatare. Ma la mente, come abbiamo visto, può molto di più. Può annullare questo difetto ponendosi, con un potere che può apparire sovrumano, fuori dagli interminabili addendi per valutarli esattamente nella loro totalità infinita.

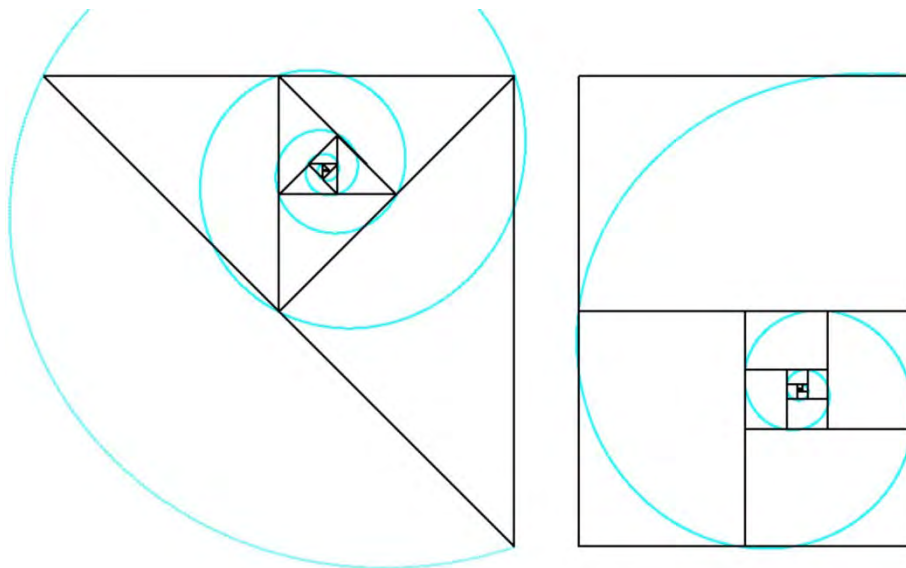


Fig. 3 - Il triangolo rettangolo equilatero e il rettangolo “gnomonico”, come il formato A4, A3 ..., sono due figure replicanti del secondo ordine che possono scomporsi in una infinita serie proporzionale di figure simili che si accumulano in un punto situato nel polo irraggiungibile di una spirale proporzionale

7 – Frattali replicanti

Esistono altre figure replicanti di ordine due? Sì, ma non sono figure ordinarie, sono frattali.

Eccone due. Il primo risale all’inizio del secolo scorso ed è dovuto a Helge van Koch (1870-1924) molto prima che Benoit Mandelbrot, ispirato anche dalle coste della Gran Bretagna, coniasse il termine frattale. Il secondo è una sua recente variante scoperta dall’autore (Pietrocola, 2024).

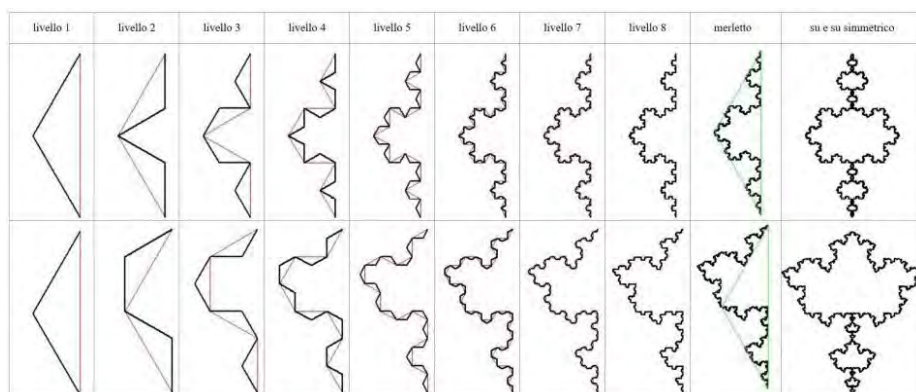


Fig. 4 - Due procedimenti infiniti dello stesso tipo per ottenere, al limite, la curva di Koch e la curva dei lepidotteri due replicanti di ordine due. Le figure finali ottenute per riflessione evidenziano il ripetersi di siamesi e falene, anche loro frattali replicanti, ma di ordine infinito

Due curve molto frastagliate, accettando l'infinito attuale, infinitamente frastagliate! Tanto che, *mirabile dictu*, hanno lunghezza infinita! In Figura 4 sono mostrate le procedure ricorsive infinite generanti le due curve. Entrambe iniziano la procedura generativa con un segmento che possiamo considerare il risultato di livello 0 e da cui erediteranno la proprietà dei replicanti del secondo ordine. Nel primo livello si sostituisce il segmento precedente con due più piccoli angolati di 120 gradi, i due segmenti formerebbero un triangolo isoscele insieme al segmento che sostituiscono. Nei livelli successivi si opera più volte la stessa trasformazione su segmenti sempre più piccoli che sono, ogni volta, in numero doppio della precedente. Ben presto il nostro occhio non percepisce più le variazioni rispetto al livello precedente. Le due curve, dette anche merletti, sono definite come limite infinito della procedura indicata. La differenza tra i due

merletti è nella diversa sequenza della sostituzione dei segmenti che possono essere applicati a destra o a sinistra, come evidenziato nella figura. In rosso ogni volta è riportato il livello precedente (Pietrocola 2025b). In verde il merletto finale è comparato con il triangolo isoscele di partenza (livello 1). Si noti che ai due lati uguali del triangolo isoscele in verde, in entrambi i casi, corrispondono copie in miniatura dell'intero merletto. Infatti anche i due lati uguali, alla fine, hanno subito una trasformazione infinita, del tutto identica perciò a quella subita dalla loro base.

Nell'ultimo riquadro di ogni fila viene formata una figura con l'immagine speculare del rispettivo merletto. Ciò evidenzia due figure ripetute dalle straordinarie proprietà tassellanti e replicanti. Queste infatti, come mostrato in Figura 5, sono frattali replicanti di ordine infinito che ci portano a considerare Apollonio di Perga e i suoi setacci.

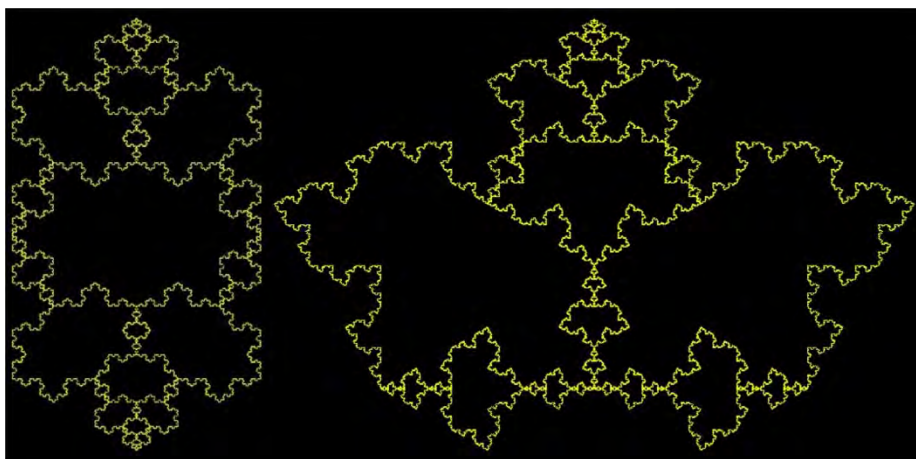


Fig. 5 - Siamese e falena gravidi, cioè scomposti in infinite copie di se stessi. Sono replicanti di ordine infinito, come il setaccio di Apollonio

8 – Apollonio di Perga

Di Apollonio sappiamo che è nato a Perga, attuale Turchia, ed è vissuto ad Alessandria d'Egitto dove è morto circa nel 190 a.C. Due sole sue opere sono giunte fino a noi. La più importante è il trattato sulle sezioni coniche. Apollonio è anche famoso per il suo setaccio.

La costruzione del cosiddetto setaccio, come mostrato in Figura 6, segue questa regola: si parte dalla costruzione di tre cerchi tangenti a due a due e si iscrivono in una circonferenza. A questo punto la continuazione è forzata. Ogni volta si inseriscono i cerchi tangenti possibili. Ogni nuovo inserimento apre nuove possibilità che aumentano esponenzialmente. Quella di Apollonio è una procedura ricorsiva interminabile. Oggi noi, accettando l'infinito attuale, la terminiamo ottenendo un oggetto matematico che classifichiamo come frattale. Suggeriti dalla biologia possiamo considerare il setaccio come un cerchio gravido, pronto a riprodursi frantumandosi in infinite copie di se stesso.

Con il suo setaccio Apollonio ha fatto con il cerchio quello che Zenone ha fatto con il segmento. Lo ha scomposto, potenzialmente, in infinite copie ridotte di se stesso. C'è una differenza però, mentre il segmento è un replicante di ordine 2 il cerchio è un replicante di ordine infinito perché non si può scomporre né in due cerchi né in un numero finito di cerchi.

In figura 5 ci sono altri due replicanti infiniti come il setaccio di Apollonio, ma che sono doppiamente frattali sia in virtù della loro struttura di replicanti, che condividono con il setaccio, sia perché, a differenza del cerchio, sono a loro volta figure frattali (figura 4).

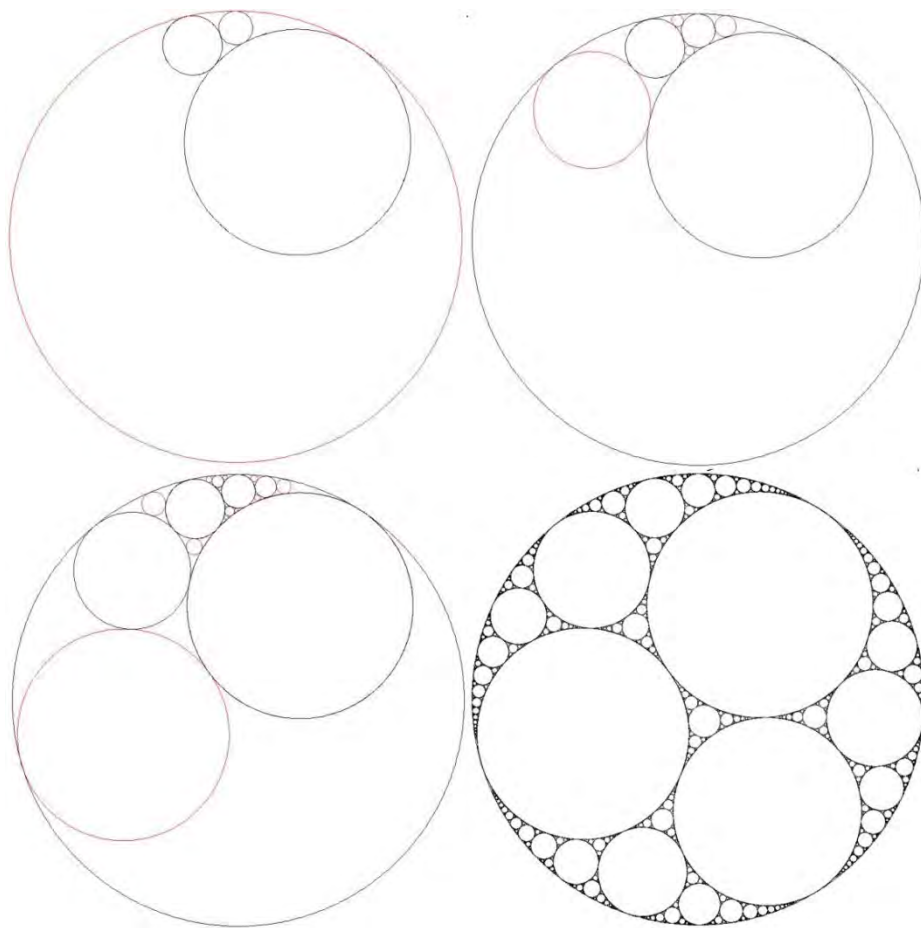


Fig. 6 - La costruzione del setaccio indicata da Apollonio, Si inizia da tre cerchi mutualmente tangenti, poi si costruisce il cerchio tangente contenitore (1° su 4) A questo punto la continuazione è forzata. Si costruiscono i cerchi tangenti possibili (2°) Ciò apre nuove possibilità (3°) Si continua la procedura infinita che presto dà un risultato approssimato indistinguibile dal frattale completo (4°)

Per finire questa breve visita al nostro secondo personaggio della cultura ellenica, mostriamo in figura 7 due setacci, tratti dal Tartapelago (Pietrocola, 2014) che non si possono costruire nel modo indicato da Apollonio.

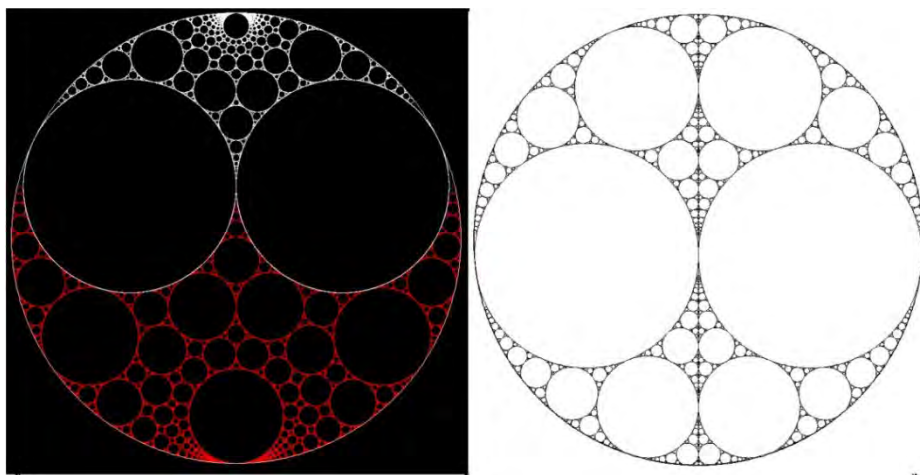


Fig. 7 - Due setacci di Apollonio non canonici.

9 - Erone di Alessandria

Erone fu matematico, astronomo, ingegnere e inventore.

È vissuto in un periodo indeterminato tra il primo e il secondo secolo d.C. Sappiamo che insegnò al museo di Alessandria. Famosa la sua formula per l'area del triangolo in funzione dei lati. Tra le opere giunte sino a noi citiamo il suo trattato *Meccanica*. Qui però ci interessa solo per la sua definizione di gnomone che generalizza un concetto già presente, in casi particolari, negli *Elementi* di Euclide (Frajese 1970). Erone definisce uno gnomone, in generale, come ciò che, "aggiunto (o sottratto) a qualsiasi entità, numero o figura, rende il tutto simile all'entità cui è stato aggiunto (sottratto)". (Zellini, 1999, p.33).

Molto prima di Erone, i greci associavano il termine gnomone ai numeri dispari. Si tenga presente che i numeri erano rappresentati in forma figurata cioè mediante dei punti disposti opportunamente. I numeri quadrati, per esempio, apparivano come punti disposti in file sovrapposte a forma quadrata. Per passare dal numero n^2 al successivo $(n+1)^2$ basta aggiungere due file di n punti, una sotto la base e una accanto all'altezza completando il nuovo quadrato con un punto intermedio che dà la giusta lunghezza ai lati. Si deve quindi aggiungere $2n+1$ cioè un numero dispari che nella rappresentazione figurata evoca una squadra (Geymonat, 1981, pp.40-58). Questa squadra potrebbe essere un collegamento con il più noto significato astronomico del termine gnomone, infatti, opportunamente costruita, con un lato può fare da base e con l'altro ergersi verso il cielo proiettando la sua ombra sul piano di appoggio.

Tornando, come altro esempio, al paradosso zenoniano dello stadio, il segmento dimezzato aggiunto al primo segmento percorso è uno gnomone. Sarebbe più preciso dire che svolge il ruolo di gnomone perché questo concetto è in realtà una relazione tra due figure. In questo particolare caso la relazione risulta riflessiva: il segmento è gnomone di se stesso. Lo stesso accade ai replicanti di ordine 2 come quelli mostrati nelle figure 3 e 4, ma sono casi rari, in generale la proprietà non vale.

Un altro possibile esempio di gnomone è il quadrato che aggiunto al lato maggiore di un rettangolo aureo (rapporto tra lati 1,61...) genera un altro rettangolo aureo. Con ciò si può constatare che la proprietà simmetrica non vale sempre. In questo caso la proprietà simmetrica non vale perché

aggiungendo un rettangolo a un quadrato non è mai possibile ottenere un altro quadrato. Conosco un'unica coppia di figure A,B che gode di questa proprietà cioè tali che A è gnomone di B e viceversa B è gnomone di A.

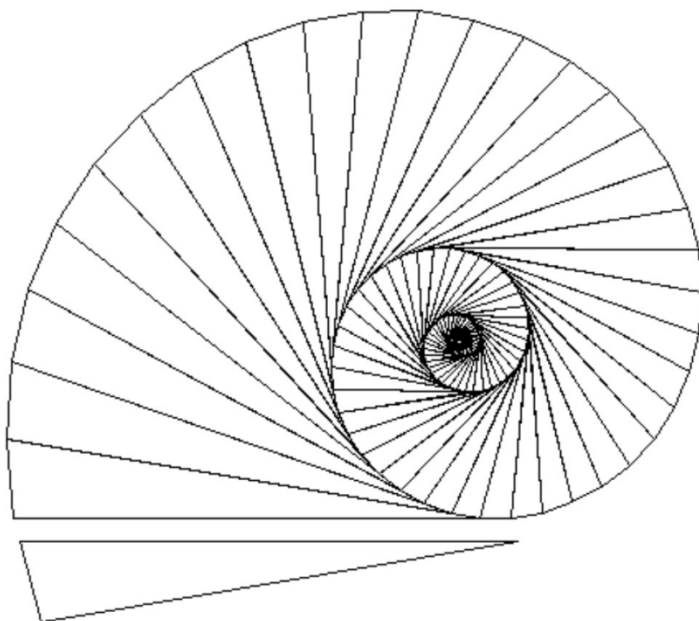


Fig. 8 - Triangolo acuto è lo gnomone della lumaca. In realtà la lumaca è un poligono di trenta lati risultato dell'accumulo di un'infinità di triangoli simili. Il loro lato minore si confonde con la spirale logaritmica che interpolano .

Credo sia l'unico caso, ma la questione è aperta. Si tratta della coppia di triangoli isosceli aurei: l'acutangolo e l'ottusangolo (Pietrocola, 2022).

10 - Eadem mutata resurgo

La definizione di gnomone secondo Erone mi sembrò subito molto interessante e mi indusse a pubblicare, nel sito didattico Maecla per il Tartapelago, “Re Aureo e l’invasione degli gnomoni”, una breve favola e “Collezione di gnomoni”, una raccolta di animazioni geometriche (Pietrocola 2005a, 2005b). Il tema dominante in questi lavori potrebbe riassumersi con il motto “Mutata risorgo”. Le animazioni infatti sono tutte cicliche, figure che perdono o acquistano una loro parte, detta gnomone, rimanendo con la stessa forma e, dopo un opportuno cambiamento di scala, ripetono all’infinito, ricorsivamente, la stessa situazione. Anche nella favola un rettangolo aureo, impersonato da un Re autoreferenziale, si riduce ogni volta a causa di invadenti gnomoni, una schiera infinita di quadrati, che tuttavia non cambiano la sua natura aurea.

La figura 8 è tratta da una delle tante animazioni presenti nel Tartapelago. Si intravedono infiniti gnomoni a forma di triangolo acuto accumulati, uno dopo l’altro, come i segmenti zenoniani, ma il risultato questa volta non mantiene la forma. Si ottiene qualcosa che ricorda una lumaca, ma che è un poligono di trenta lati. Nell’immagine animata la lumaca sta perdendo un suo gnomone, ma non la sua forma che, opportunamente ingrandita, la riporterà alla situazione iniziale e quindi a ripetere, interminabilmente, la stessa trasformazione. I lati minori dei triangoli accumulati nella lumaca formano una spezzata che interpola una spirale proporzionale. Non a caso questa spirale è detta anche spirale della crescita perché può far crescere esseri viventi, come la lumaca, senza variarne la forma.

Questa spirale abbastanza visibile nella lumaca non è un'eccezione (Figure 2,3,4) nelle figure autosimili che, per effetto Droste, si ripetono all'infinito in un vortice di immagini simili, sempre più piccole. La spirale proporzionale è nascosta, ma non troppo, nella definizione di Erone. Possibile che Erone non se ne sia accorto e che solo nel XVI secolo sia stata studiata? A me piace pensare che Erone, di cui ben poco sappiamo, l'abbia descritta e studiata, ma che i documenti che lo attestano non ci siano giunti. Sicuramente molto più tardi questa spirale fu studiata da Jacob Bernoulli (1654-1705) che ne fu così affascinato da volere un'immagine di quella spirale da lui definita mirabile, insieme con il motto "*eadem mutata resurgo*", incisa nella lapide che ora, nella cattedrale di Basilea, lo ricorda ai posteri. Accadde però che la mirabile spira nella realizzazione del monumento risultò una più semplice spirale di Archimede in cui la distanza tra le spire non cambia. Ci piace pensare che, contrariamente a quanto si crede, non sia stato un banale errore, ma una raffinata rappresentazione artistica in scala logaritmica. Ciò si accorderebbe bene con l'usanza prevalente, altrimenti didatticamente poco chiara, di chiamare logaritmica questa spirale.

11 - Conclusione

Concludiamo qui questo breve viaggio introduttivo che, senza pretese di esaurire l'argomento, con intento divulgativo, seguendo un filo conduttore che collega il pensiero antico con il moderno, ha cercato di interessare il lettore presentando con

parole ed immagini alcuni concetti importanti non solo nel variegato mondo frattale.

Tutte le illustrazioni di questo articolo sono state realizzate dall'autore con FMS Logo, una versione del linguaggio Logo che si può scaricare gratis.

Alla url: "www.pietrocola.eu/periodicomat25.htm" chi è interessato può trovare spiegazioni dettagliate su come ottenere questo programma insieme alle procedure per costruire alcune figure frattali presentate in questo articolo con spiegazioni ed esempi del loro uso (Pietrocola, 2025a).

Bibliografia

- FRAJESE Attilio, MACCIONE M. (1970). *Elementi*. Torino: UTET
- GEYMONAT Ludovico (1981). *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, vol. 1. Milano: Garzanti.
- GARDNER Martin (1997). *Enigmi e giochi matematici*, vol.4. Firenze: Sansoni.
- PIETROCOLA Giorgio (2022). Gnomoni aurei e no. «*Archimede*» 1/2022, pp.2-7.
- PIETROCOLA Giorgio (2023). Il siamese di Koch. «*Periodico di Matematica*» (IV) Vol. V(2) giugno, pp. 109-123.
- PIETROCOLA Giorgio (2023a). Spirale proporzionale. «*Mondo Matematico e Dintorni*», Vol 6, No 2, 21-32.
- PIETROCOLA Giorgio (2024), Il siamese e la falena, due frattali per l'arte di Escher. «*Archimede*» 3/2024, pp. 159-166.
- PIETROCOLA Giorgio (2025a). Affinità tra figure frattali «*Periodico di Matematica*» (IV) Vol. VI(4) pp. 109-121.
- PIETROCOLA Giorgio (2025b). *Introduzione ai frattali attraverso Zenone di Elea, Apollonio di Perga e Erone di Alessandria*, Intervento 2° Convegno Ascea: Intrecci e confronti tra le Scienze Matematiche e le Scienze Umanistiche.
- ZELLINI Paolo (1999). *Gnomon. Un'indagine sul numero*. Milano: Adelphi.



Profili biografici degli autori

D'Angelo Giuseppe - sitdang010762@gmail.com

Laureato in Scienze Agrarie, ha conseguito l'abilitazione all'esercizio professionale di Agronomo e l'abilitazione all'insegnamento in Scienze Naturali. Docente a tempo indeterminato presso il liceo Scientifico Statale "Leonardo" di Giarre (CT). Ha collaborato saltuariamente con la rivista scientifica «Coelum Astronomia», nella quale ha pubblicato recentemente l'articolo *Il paradosso di olbers: un metodo per conoscere il numero di stelle che popolano l'universo*, e con il «Periodico di Matematica» con l'articolo: *Se le calotte polari si sciolgono.....* È autore di varie pubblicazioni su diverse altre riviste («La Chimica nella Scuola», «La tecnica della Scuola», «Linx Magazine») e del saggio *Lo Spazio Polisimmetrico* – prima edizione Ed. Book Sprint (cod ISBN 978-88-6823-1729). È autore di varie pubblicazioni su diverse altre riviste («La Chimica nella Scuola», «La tecnica della Scuola», «Linx Magazine», «ArteScienza», «La Ricerca») e di alcuni saggi.

Umberto Bartocci (Roma) - bube231@yahoo.it.

È stato tra l'altro docente di Algebra e Storia delle Matematiche presso l'Università di Perugia. Nei suoi lavori non specialistici si è occupato dei fondamenti della matematica e della fisica nel XX secolo, cercando di mettere in evidenza la loro comune origine filosofica "nichilistica".

Andrea Battocchio (Milano) - andrea.battocchio@levi.edu.it

Docente di matematica e fisica presso il Liceo “Primo Levi” di San Donato Milanese e professore a contratto in History of Technology presso il Dipartimento di Ingegneria Industriale e dell’Informazione dell’Università di Pavia per l’anno accademico 2025/26. Laureato in Ingegneria e Filosofia, ha conseguito un dottorato in Storia della Scienza e si occupa di ricerca nell’ambito della didattica della matematica e della fisica e di come la storia delle discipline scientifiche possa agevolare il loro insegnamento.

Luca Nicotra (Roma) - luca.nicotra1949@gmail.com

Laureato in Ingegneria Meccanica a pieni voti all’Università “Sapienza” di Roma. Giornalista iscritto all’Ordine Nazionale dei Giornalisti albo pubblicisti dal 2008. Autore di circa 450 articoli, culturali, tecnici e di divulgazione scientifica, e di vari libri fra cui: *Bruno de Finetti: un matematico scomodo* (coautore Fulvia de Finetti) Livorno: Belforte, 2008, la prima biografia mondiale del grande scienziato; *Ingegneria Assistita dal Computer, vol. 1.* (coautore F. Campana) Roma: UniversItalia, 1ed. 2012 e 2ed. 2014; *Nello specchio dell’altro: riflessi della bellezza tra arte e scienza* (coautore Rosalma Salina Borello) Roma: Universitalia, 2011; *Quasicristalli. Intrecci segreti fra natura, arte e scienza* (coautori C. Francou e U. Locatelli) Roma, UniversItalia, 2017. Ha svolto attività di ricerca nel campo della trasmissione del calore presso l’Istituto di Fisica Tecnica dell’Università “Sapienza” di Roma e nel settore dei sistemi di guerra elettronica nell’industria della difesa (Elettronica S.p.A. – Roma). È esperto di sistemi computerizzati per la progettazione e produzione meccanica e ha svolto una intensa attività di formatore di progettisti meccanici presso molte importanti industrie nazionali. Dal 2014 tiene annualmente il “Corso Mechanical Design con CATIA V5” al Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale dell’Università “Sapienza” di Roma. È Presidente

dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", membro onorario dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV) e dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU), membro del comitato scientifico della rivista «Science & Philosophy», fondatore e direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale della casa editrice UniversItalia di Roma, per la quale cura la collana *Scienza e Cultura*. Dirige anche le collane *Ingegneria Industriale Assistita dal computer* e *Il filo della conoscenza* per la casa editrice Inriga di Bologna, con la quale ha pubblicato i libri *La progettazione meccanica con CATIA V5* (2023), *Le fasi del ciclo di vita del prodotto. Il ruolo dell'informatica* (2023), *La verità in matematica. Da Gödel a Euclide* (2024), CAM-CAPP. *La produzione assistita dal computer* (coautore Sandro Turchetta) (2025), *Dai robot alla fabbrica automatizzata* (coautore Donato Orlandi) (2025), *La gestione dello sviluppo di un prodotto industriale. PDM-PLM* (coautore Riccardo Salvatore) (2025). Per le ricerche si veda il sito Research Gate.

Giorgio Pietrocola - giorgio.pietrocola@gmail.com.

Laurea in matematica all'università "Sapienza" di Roma. Inizia la carriera come addetto alle esercitazioni nel corso di Analisi Matematica della facoltà di Architettura di Roma. Dopo il servizio militare insegna nelle scuole medie superiori fino al 2007 anno del pensionamento. Contemporaneamente svolge lavoro di programmatore realizzando anche software didattico. Si interessa al linguaggio Logo e alla filosofia educativa di Seymour Papert e crea nel proprio istituto un laboratorio di Matematica. Alla fine degli anni '90 collabora alla direzione e conduce workshop nei corsi di Perfezionamento Educazione e Tecnologie alla LUMSA di Roma. Nel 2000, è tra gli autori e i curatori del libro *Apprendimento e nuove strategie educative* Edizioni Unicopli. Su Internet nel 2005

idea e realizza il Tartapelago, un sito divulgativo, con animazioni didattiche di natura geometrica costruite mediante il linguaggio Logo. Dopo il pensionamento si diletta nella ricerca, si occupa soprattutto del problema classico della somma di potenze di interi successivi, facendo diverse scoperte alcune delle quali sembrano essere originali. Questa attività sfocia nella pubblicazione di articoli su riviste specializzate in matematica e in didattica nonché nella partecipazione a diversi convegni nazionali.

Bonaventura Paolillo (Salerno) -

bonaventura.paolillo@gmail.com

Si è laureato in Matematica e Scienze dell'informazione a Salerno. Ha conseguito poi il Phd in Matematica sotto la supervisione del prof. Gerla, occupandosi di Geometria senza Punti. È stato Tutor/Formatore TFA nel 2015 per la classe di concorso A047. Insegna Matematica e Fisica al Liceo Scientifico "Severi" di Salerno. Si occupa di temi legati alla divulgazione della matematica, come la Probabilità e le sue applicazioni, Irrazionalità di numeri notevoli, la Geometria,... Ha pubblicato una quindicina di articoli di tali temi su riviste nazionali e internazionali.

Rocco Vittorio Macrì (RC) - rvm2000@gmail.com.

Ha fatto parte del Gruppo di Ricerca "Geometria e Fisica" del Dipartimento di Matematica dell'Università di Perugia. Filosofo di formazione, ha da sempre focalizzato la sua attenzione sui fondamenti epistemologici della scienza. È l'autore del libro EratoStone, la Stele di Rosetta dei numeri primi.