

Il concetto di potenza nelle sue molteplici accezioni: una analisi epistemologica

Parte Prima

Franco Eugeni*

DOI:10.53159/PdM(V).v1n2.172

Ricevuto 28-04-2026 Accettato 29-09-2026 Pubblicato 30-09-2026



Abstract: *The following work is devoted to a critical examination of the concept of power of a number. This may seem extremely simple, and indeed the first paragraphs contain only clarifications that are well known to many. However, as the discussion progresses, new elements gradually emerge, especially when one wishes to introduce the concept of an exponent with a negative base and a fractional exponent—a concept that must be abandoned when the exponent of a negative base is irrational. Nevertheless, this concept can be recovered when we introduce the more general notion of both exponent and base being complex. In this first work, we shall confine ourselves*

*Già professore ordinario di Discipline Matematiche e di Filosofia della Scienza, Presidente dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane; eugenif3@gmail.com

to the real field. In a subsequent work, the concept of power will be studied in the complex field and in certain real or complex algebras, such as the bicomplex numbers, dual numbers, bicomplex numbers, quaternions, and, more generally in matrix algebra. Throughout this entirely expository work, several proofs are presented which, in my opinion, are not easy to find in the literature and are sometimes overlooked. I have considered it appropriate to highlight them because they are neither trivial nor lacking in epistemological interest.

Keywords: Power of a number – irrational numbers – transcendental numbers – power with a negative base and a rational exponent.

Sommario: *Il seguente lavoro è dedicato ad un esame critico relativo al concetto di potenza di un numero. La cosa può sembrare estremamente semplice ed in realtà nei primi paragrafi appaiono solo delle precisazioni, a molti ben note. Tuttavia andando avanti nelle osservazioni lentamente emergono elementi nuovi, specialmente se si vuole introdurre il concetto di esponente a base negativa ed esponente frazionario, concetto che va abbandonato quando l'esponente di una base negativa è irrazionale. Ma tale concetto potrà essere recuperato quando introdurremo il più generale concetto di esponente e base entrambi complessi. In questo primo lavoro ci limiteremo al campo reale. In un successivo lavoro il concetto di potenza sarà studiato nel campo complesso e in alcune algebre reali o complesse, quali i numeri bireali, i duali, i bicompletti, i quaternioni e ancora più in generale nelle algebre di matrici. Nel corso del lavoro, del tutto divulgativo, sono presentate alcune dimostrazioni, a mio avviso di non facile reperimento, talvolta trascurate, che ho ritenuto opportuno evidenziare in quanto non banali ed interessanti dal punto di vista epistemologico.*

Parole chiave: Potenza di un numero - numeri irrazionali—numeri trascendenti – potenza a base negativa ed esponente razionale.

1 Il concetto classico di potenza di un numero reale positivo

Ricordiamo al lettore che se a è un numero reale e se $n \geq 2$ è un naturale, si pone $a^n = a \cdot a \cdot a \dots a$ ($n \geq 2$ fattori eguali ad a , ovvero moltiplicando a per se stesso, $n - 1$ volte).

Il numero a si dice la base ed n l'esponente.

Teorema 1.1. *Siano date due potenze di egual base a^n, a^m con $n - m \geq 2$. Si ha allora:*

1. $a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{(n-m)}$, con $n - m \geq 2$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a \neq 0 \Rightarrow a^n = a^m \iff m = n$
5. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
7. $a^n = b^n \iff a = b$
8. $ab \neq 0 \Rightarrow a > b \iff a^n > b^n$
9. $a \neq 0 \Rightarrow m > n \iff a^m > a^n$

Dimostrazione. Banale

Si è ritenuto opportuno eliminare la restrizione del teorema precedente sugli esponenti per i quali è richiesto che sia $n - m \geq 2$. Allo scopo ampliamo la definizione di potenza completandola con le definizioni formali seguenti, la cui necessità capiremo a breve. Porremo nel seguito:

$$a^1 = a,$$

e per $a \neq 0$ poniamo ancora:

$$a^0 = 1 \text{ e } a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

definendo in tal modo per una base a reale qualsiasi la potenza ad esponente unitario e per una base reale non nulla sia la potenza ad esponente zero, che la potenza ad esponente negativo.

Poste queste definizioni, osserviamo:

1. Nel caso sia $m = 1$, il primo membro della (2) ha sempre significato, ma il secondo membro acquista significato solo per via della posizione $a^1 = a$, avendosi di conseguenza:

$$\frac{a^{(m+1)}}{a^m} = a^{(m+1)-m} = a^1 = a$$

2. Nel caso siano $m = 0, a \neq 0$ il primo membro della (2) ha sempre significato, ma il secondo membro acquista significato per la posizione $a^0 = 1$, avendosi di conseguenza:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1.$$

3. Nel caso siano $m < 0, a \neq 0$, si può scrivere, per la definizione di base non nulla ed esponente negativo, e notando che $m - n$ non è negativo:

$$a^{n-m} = a^{-(m-n)} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

Ne segue allora che la (2) vale quali che siano n ed m , si ha:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (1)$$

con n, m qualsiasi.

È immediato convincersi che le relazioni precedenti del teorema valgono per n e m qualsiasi. Si ha allora:

$$a^{-n}a^{-m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{(-n)+(-m)} \quad (2)$$

$$\frac{a^{-n}}{a^{-m}} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{(-n)-(-m)} \quad (3)$$

$$(a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} = (a^m)^n = a^{(-m)(-n)} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} a \neq 0 \Rightarrow a^{-n} = a^{-m} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m} \Leftrightarrow a^n = a^m \Leftrightarrow m = n \Leftrightarrow -m = -n. \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo valgono le altre. □

2 La teoria dei radicali

Premettiamo la nozione di radice aritmetica di un numero reale non negativo $a \geq 0$.

Definizione 2.1. *Dati un numero reale $a \geq 0$ e un naturale $n \geq 2$ si chiama radice aritmetica n -ma di a , quel numero reale $b \geq 0$ tale che $b^n = a$. Tale numero b si indica con il simbolo: $\sqrt[n]{a}$.*

Nota 2.1. *Prima del XVI secolo, i matematici indicavano la radice quadrata scrivendo per esteso il termine latino radix o abbreviandolo con una R (spesso tagliata da una linea diagonale, come fece Fibonacci nel 1220). Il simbolo di radice, nell'uso attuale, fu introdotto dal matematico tedesco Christoff Rudolff (1499 –1545) nel 1525.*

Il numero reale a si chiama radicando e il simbolo $\sqrt[n]{a}$ si chiama radicale, mentre n si chiama indice del radicale:

$$\sqrt[\text{indice}]{\text{radicando}} = \text{radicale}$$

La definizione si completa osservando che per definizione è:

$$\sqrt[n]{a} = a \text{ e } \sqrt[n]{a^n} = a$$

Se $a > 0$ nel caso di indice dispari, si definisce¹ un radicale a base negativa e indice dispari ponendo:

$$\sqrt[2n+1]{-a} = - \sqrt[2n+1]{a}$$

¹Non viene definita, in campo reale, la potenza di base negativa $-a$ ($a \geq 0$) ed esponente un intero pari $2n$ ($n \geq 1$), poiché l'equazione binomia $x^{2n} = -a$ non ha soluzioni in campo reale.

con la convenzione che non si usa mai nella teoria e calcolo dei radicali una base negativa, così quando si presenta un radicale a base negativa e indice dispari, il segno meno si porta fuori della radice!

La convenzione si giustifica osservando che entrambi i membri della precedente sono la unica soluzione dell'equazione binomia:

$$x^{2n+1} = -a$$

Le principali proprietà nell'ipotesi $a \geq 0$ ed essendo gli indici numeri naturali, le cui dimostrazioni sono peraltro reperibili nei testi di scuola secondaria, si lasciano al lettore. Presentiamo le seguenti:²

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{(m+n)}} \quad (5)$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{m-n}} \quad (6)$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \Rightarrow \sqrt[n]{a^{nk}} = a^k \quad (7)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \quad (8)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt{mn}{a} \quad (9)$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{a} \text{ (iper - razionalizzazione)} \quad (10)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (11)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (12)$$

²Per via delle definizioni date quando si opera sui radicali sia la base che l'indice del radicale sono considerate non negativi.

$$a^k \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{kn}b} \quad (13)$$

La seguente si chiama formula del radicale doppio:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \quad (14)$$

Teorema 2.1. *Il problema è trovare x e y tali che:*

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

ovvero tali che:

$$a \pm \sqrt{b} = x + y \pm 2\sqrt{xy}$$

Dimostrazione. Consideriamo, allo scopo, il sistema delle due equazioni:

$$x + y = a, \quad 4xy = b$$

la cui risolvente è:

$$t^2 - at + \frac{b}{4} = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$x = t_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}, \quad y = t_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2},$$

dalle quali l'asserto. □

Lo studio dei radicali ci conduce, per approfondire in diverse direzioni. Non ci risulta che ci siano generalizzazioni della formula del radicale doppio, tranne forse il caso particolare numerico:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920) trovò la formula:

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{\dots}}}} \quad (15)$$

È interessante capire come Ramanujan sia arrivato a concepire questa formula. Riportiamo il suo calcolo:

$$\begin{aligned} 3 &= \sqrt{9} = \sqrt{(1 + 2 \cdot 4)} = \sqrt{1 + 2\sqrt{16}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 15}} = \\ &\quad \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3 \cdot 5}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3 \cdot \sqrt{25}}} = \\ \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}} &= 1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4 \cdot \sqrt{1 + 5 \cdot 7}}} = \\ 1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4 \cdot \sqrt{1 + 5 \cdot \sqrt{1 + 6 \cdot 8}}}} &= ecc. \end{aligned}$$

con $8 = \sqrt{64} = \sqrt{1 + 7 \cdot 9}$

La precedente si generalizza per $n \geq 2$ nella:

$$n + 1 = \sqrt{1 + n\sqrt{1 + (n + 1)\sqrt{1 + (n + 2)\sqrt{\dots}}}} \quad (16)$$

e ancora nella:

$$\sqrt[n + x + a]{[ax + (n + a)^2] + x\sqrt{[ax + (n + a)^2] + (x + 1)\sqrt{[ax + (n + a)^2] + (x + 2)\sqrt{\dots}}}}$$

Si ha ancora che:

$$\sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \sqrt{x_3 + \sqrt{a}}}}$$

converge $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, esiste ed è finito.

3 Il concetto di potenza con base un numero reale positivo ad esponente razionale

Vogliamo ora estendere il concetto di potenza anche ad esponenti razionali.

Siano n, m due naturali, e sia $a \geq 0$, un numero reale, poniamo:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (17)$$

Si noti che le proprietà dei radicali si traducono nelle seguenti proprietà degli esponenti razionali:

$$\frac{m}{n} = \frac{h}{k} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{h}{k}} \quad (18)$$

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{h}{k}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{h}{k}} = a^{\frac{mk + nh}{nk}} \quad (19)$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{h}{k}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{h}{k}} = a^{\frac{mk - nh}{nk}} \quad (20)$$

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} \quad (21)$$

Nota 3.1. Il concetto di potenza ad esponente frazionario fu teorizzato per la prima volta dal filosofo e matematico francese Nicole Oresme (1325-1382) intorno al 1350, nel suo trattato *De proportionibus proportionum*. (1499 – 1545). L'idea venne ripresa e perfezionata solo teoricamente da Michel Stiefel (1487-1567) e Simon Stevin (1548-1620), che usarono simboli propri. Tuttavia, il concetto fu ripreso e formalizzato nei suoi aspetti teorici da John Wallis (1616-1703) nel 1656, ma fu Isaac Newton (1643- 1726) nel 1676 ad introdurre ufficialmente la scrittura moderna con la frazione posizionata in alto a destra.

4 Le anomalie del concetto di potenza con base un numero reale negativo ed esponente razionale

Supponiamo sempre che n, m siano due naturali, e $a \geq 0$ sia un numero reale, definiamo la potenza di un numero reale negativo ed esponente frazionario, ponendo:

$$-a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{-a^m} \quad (22)$$

$$(-a)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{(-a)^m}} \quad (23)$$

simboli che hanno senso in campo reale, escluso il caso in cui sia $m = 2p + 1$ dispari e $n = 2q$ pari. Infatti in tale caso l'eventuale $\sqrt[n]{(-a)^{2k+1}}$ implicherebbe l'esistenza di una soluzione per l'equazione:

$$x^{2h} = (-a)^{2k+1} = -(a)^{2k+1}$$

che come è ben noto non esiste in campo reale.

Alcune formule valide nel caso di base positiva non valgono più nel caso di base negativa.

Tuttavia si presentano diverse anomalie sulle formule derivate. Ad esempio si ha che non sempre coincidono le espressioni quando n ed m sono entrambi pari:

$$\sqrt[n]{(-a)^m} \text{ e } \left(\sqrt[n]{-a} \right)^m$$

Infatti:

$$\sqrt[2]{(-3)^4} = 9 \quad , \quad (\sqrt[2]{-3})^4 = (i \sqrt[2]{3})^4 = i^4 9 = 9 \text{ (eguali)}$$

$$\sqrt[2]{(-3)^6} = 27 \quad , \quad (\sqrt[2]{-3})^6 = (i \sqrt[2]{3})^6 = i^6 27 = -27 \text{ (opposti)}$$

$$\sqrt[2]{(-2)^3} = 2 i \sqrt[2]{2} \quad (\sqrt[2]{-2})^3 = 2 i^3 \sqrt[2]{2} = -2 i \sqrt[2]{2}$$

Chiaramente l'essere eguali o no dipende dalla natura delle potenze di i . A rigore il passaggio per i numeri complessi in realtà sarebbe interdetto e mentre il primo esiste in ambo i casi il secondo non esiste in ambo i casi. Nel terzo esempio i valori sono immaginari ed opposti.

Se invece n è dispari l'eguaglianza vale sempre quale che sia m pari con risultato nel campo reale. Dunque si ha:

$$n = 2k + 1 \Rightarrow \sqrt[n]{-a^m} = (\sqrt[n]{-a})^m \quad (24)$$

Ad esempio se $m/n = h/k$ risulta:

$$-a^{\frac{m}{n}} = -a^{\frac{h}{k}}$$

solo nel caso che m e h sono entrambi pari, oppure entrambi dispari, pur comunque essendo sempre eguali in modulo, avendosi:

$$\left| (-a)^{\frac{m}{n}} \right| = \left| (-a)^{\frac{h}{k}} \right|$$

sempre escludendo il caso che m ed n oppure h e k siano dispari con n e k pari.

Valgono, infatti i seguenti controesempi sempre nel campo reale R .

È $6/4 = 3/2$ ma risulta: $(-3)^{\frac{6}{4}} = (3)^{\frac{6}{4}} = \sqrt[4]{27} > 0$ mentre $(-3)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{-27}$ che non esiste in R ; è $2/2 = 1$ e risulta $(-2)^{2/2} = (2)^{2/2} = 2$ mentre $(-2)^1 = -2 \neq +2$; è $20/12 = 10/6 = 5/3$ e risulta: $(-2)^{20/12} = (-2)^{10/6} > 0$ mentre $(-2)^{5/3} < 0$.

Si osservi ancora le eguaglianze $9/6 = 6/4 = 3/2$ e risulta:

$$(-2)^{9/6} \text{ no in } R, (-2)^{6/4} = 2^{6/4} = \sqrt[4]{8} > 0, (-2)^{3/2} = \sqrt{-8} \text{ no in } R.$$

Ci si chiede ancora se siano valide le formule:

$$\begin{aligned} (-a)^{\frac{m}{n}} \cdot (-a)^{\frac{h}{k}} &= (-a)^{\frac{m}{n} + \frac{h}{k}} = (-a)^{\frac{mk + nh}{nk}} \\ (-a)^{\frac{m}{n}} : (-a)^{\frac{h}{k}} &= (-a)^{\frac{m}{n} - \frac{h}{k}} = (-a)^{\frac{mk - nh}{nk}} \end{aligned}$$

Osserviamo che quando si sommano due numeri razionali positivi, il risultato finale si può semplificare dividendo sia il numeratore

che il denominatore per un divisore comune d dei medesimi secondo la relazione:

$$\frac{m}{n} + \frac{h}{k} = \frac{mk + nh}{nk} = \frac{(mk + nh)/d}{nk/d}$$

dove d varia tra 1 e il MCD $(mk + nh ; nk)$. L'esempio seguente è chiarificatore.

Considero il numero razionale:

$$\frac{42}{60} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{2^2 \cdot 3 \cdot 5}$$

I divisori comuni d tra numeratore e denominatore sono: 1, 2, 3, 6 = MCD (42;60).

Si ha dividendo per i vari divisori 1, 2, 3, 6, i vari casi:

$$(-2)^{\frac{42}{60}}, (-2)^{\frac{21}{30}}, (-2)^{\frac{14}{20}}, (-2)^{\frac{7}{10}}$$

dei quali il secondo e il terzo

$$(-2)^{\frac{21}{30}} = \sqrt[30]{-2^{21}}, \quad (-2)^{\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{-2^7}$$

non esistono in campo reale, mentre esistono il primo e terzo, sono eguali tra loro e valgono:

$$(-2)^{\frac{42}{60}} = (2)^{\frac{42}{60}} = (2)^{\frac{14}{20}} = (-2)^{\frac{14}{20}} = (2)^{\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{128}$$

Ancora si ha per la frazione $\frac{10}{14}$ con divisori 1 e 2 = MCD (10,14) l'esistenza di due possibili casi peraltro tra loro discordi:

$$(-2)^{\frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 7}} = (2)^{\frac{5}{7}} \neq (-2)^{\frac{5}{7}} = - (2)^{\frac{5}{7}}.$$

Considerazione del tutto analoghe si possono svolgere per la divisione di potenze frazionarie a base positiva.

L'ulteriore relazione sulla quale si possono sviluppare considerazioni sono le formule dell' "includere ed estrarre":

$$b^k (-a)^{\frac{m}{n}} = (-ab)^{\frac{mk}{n}}$$

e ancora le seguenti:

$$\begin{aligned} (-ab)^{\frac{m}{n}} &= (-a)^{\frac{m}{n}} (b)^{\frac{m}{n}} = (-a)^{\frac{m}{n}} (b)^{\frac{m}{n}} \\ (ab)^{\frac{m}{n}} &= (a)^{\frac{m}{n}} (b)^{\frac{m}{n}} = (-a)^{\frac{m}{n}} (-b)^{\frac{m}{n}}. \end{aligned}$$

Ancora possiamo costruire esempi e contro-esempi per gli esponenti negativi. Lasciamo ai lettori questo “divertente compito”.

Concludendo appaiono ben chiare le difficoltà che nascono quando si trattino le potenze a base negativa ed esponente razionale. Esse a volte esistono a volte no, a volte nelle semplificazioni cambia il segno. Le questioni sono molto più difficili di quanto non sembrino a priori e questo è uno dei motivi per cui in prima approssimazione quando si trattano le formule dei radicali, o il che è lo stesso le formule ad esponente razionale, si preferisce supporre la base non negativa. Nel successivo lavoro sulle potenze a base complessa ed esponente complesso tenteremo di rendere uniforme la trattazione delle potenze a base qualsiasi e esponente qualsiasi con la sola eccezione dello 0 elevato a zero che non si definisce e da luogo nella teoria dei limiti ad uno dei casi cosiddetti di indeterminazione.

5 Potenza a base reale ed esponente reale

L’ultimo passo che si fa in campo reale è la definizione di potenza ad esponente reale.

Sia dato un numero reale $a \geq 0$, e sia $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ una successione di numeri razionali positivi tali che: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Segue allora:

Teorema 5.1. . *La successione $a^{x_1}, a^{x_2}, \dots, a^{x_n}, \dots$ di numeri positivi, nelle ipotesi indicate sopra, converge ad un limite, limitato superiormente che, per definizione, è positivo e si denota con a^x , risulta cioè:*

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$$

Teorema 5.2. *Se $a > 0$, $b \geq 0$, $a \neq 1$, l'equazione in x , $a^x = b$, ha una e una soluzione in campo reale che si denota con $x = \log_a b$.*

Nota 5.1. $b = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

1. $a^{\log_a x} = x$ (identità fondamentale)
2. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (trasformazione di un prodotto in somma, segue: $xy = a^{\log_a x + \log_a y}$)
3. $\log_a x = \log_b x / \log_b a$ (cambiamento di base)
4. $x^y = a^{y \log_a x}$ (trasformazione di una potenza in prodotto)

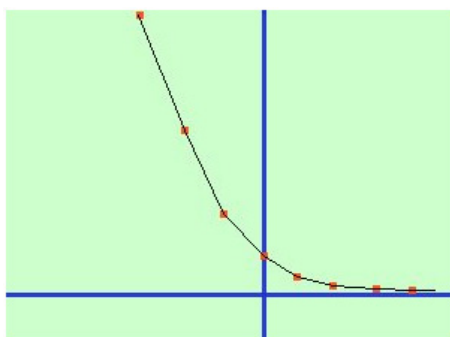


Fig. 1 - $y = a^x$ per $0 < a < 1$

Riportiamo i grafici degli esponenziali e dei logaritmi.

Considero la funzione $y = a^x$

Se $0 < a < 1$ si ha il grafico di figura 1. Se $a > 1$ si ha il grafico di figura 2.

La funzione $y = \log_a x$, definita per $x > 0$, presenta ancora due possibili grafici. Per $0 < a < 1$, la curva ha il grafico di figura 3.

Mentre se $a > 1$, si ha l'andamento di figura 4.



Fig. 2 - $y = a^x$ per $a > 1$

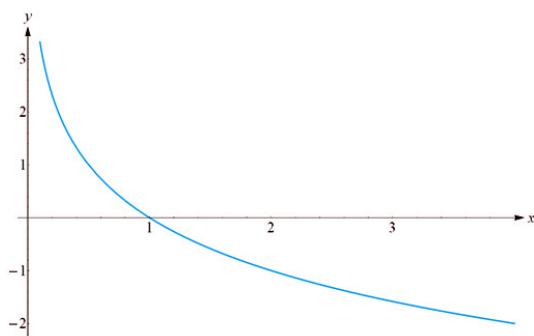


Fig. 3 - $y = \log_a x$, con $0 < a < 1$

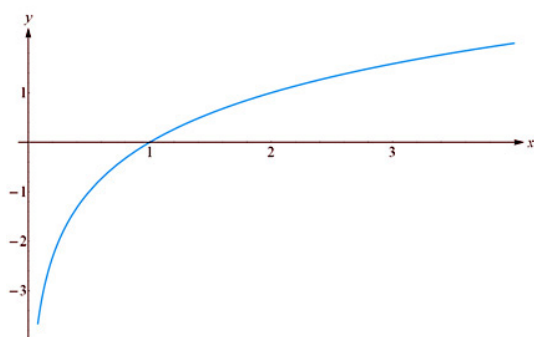


Fig. 4 - $y = \log_a x$, con $a > 1$

6 Il numero e : base dei logaritmi di Nepero

In questo paragrafo approfondiamo la storia e i fondamenti del numero e , una costante matematica che sembra sia stata introdotta da Nepero nel 1618. Taluni infatti lo chiamano numero di Nepero, in quanto il primo riferimento in letteratura risalirebbe al citato anno 1618 ed apparirebbe nella tavola di una appendice di un lavoro sui logaritmi di John Napier (1550-1617). Nella tavola non appare espressamente la costante, bensì un elenco di logaritmi naturali, calcolabili a partire dalla costante. Circola tuttavia la voce che la tavola sia stata scritta da William Oughtred (1574-1660).

Il matematico tedesco e monaco agostiniano Michel Stifel (1486-1507) fu un incredibile innovatore. Introduce l'idea di una corrispondenza biunivoca tra una progressione geometrica e una aritmetica, che è in sé l'idea del logaritmo.³

Nota 6.1. *L'opera più importante di Michael Stifel, è: Arithmetica integra (1544). Ed. Johann Petreiu, Norimberga, che contiene varie ed importanti innovazioni nel simbolismo matematico. Dati due numeri x ed y , indica la moltiplicazione con xy , ovvero introduce il simbolo della moltiplicazione per giustapposizione (senza alcun segno tra i termini). Utilizza numeri sia positivi che negativi, che al tempo chiamavano "numeri absurdi" ed erano rifiutati dall'accademia imperante. Stifel li utilizzò come equivalenti agli altri numeri. Così introdusse un unico caso per le equazioni di 2° grado, non dovendo usare numeri solo positivi. È il primo a utilizzare il concetto di "esponente" includendo anche le prime regole per il calcolo delle potenze, quali:*

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

Utilizza anche esponenti negativi e precisa che la costruzione di una loro teoria avrebbe comportato molto lavoro, ma avrebbe prodotto risultati di grande interesse. Discusse anche attorno alle proprietà

³https://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Stifel.

dei numeri irrazionali, ponendo la questione se questi fossero numeri da considerare esistenti o solo fittizi come voleva l'accademia. Stifel li trovò molto utili per la matematica e non superflui ed escogitò un metodo per calcolare le radici di ordine superiore utilizzando sia i coefficienti binomiali sia le successioni. Il libro contiene una tabella di numeri interi e potenze di 2 che alcuni hanno considerato una versione primitiva di una tavola logaritmica. Stifel sottolinea esplicitamente che le operazioni di moltiplicazione e divisione nella serie geometrica possono essere poste in corrispondenza biunivoca con le operazioni di addizione e sottrazione nella serie aritmetica. Stifel come Monaco fu un riformatore protestante sostenitore di Martin Lutero (1483-1546), come matematico fu professore all'Università di Jena.

Il concetto di logaritmo naturale fu per la prima volta descritto dal matematico tedesco Nicolaus Mercator (1620-1687) nel suo scritto *Logarithmotechnia*, pubblicato nel 1668, anche se, precedentemente il matematico inglese John Speidell⁴ (1600-1634) un collaboratore di Napier, che nel 1619, pubblicò una tabella intitolata "New Logarithmes" nella quale calcolò i logaritmi naturali di seni, tangenti e secanti. Una nuova edizione di "New Logarithmes" fu pubblicata nel 1622 e conteneva un'appendice con i logaritmi naturali di tutti i numeri da 1 a 1000.

È parere di diversi storici, che la costante e sarebbe stata usata, per la prima volta, nel 1683, dal matematico svizzero Jakob I Bernoulli (1655-1705) in una sua nota sul calcolo degli interessi composti. Molto interessante è la storia e la genealogia della famiglia svizzera dei Bernoulli.⁵ Jakob I fu il filosofo profondo della famiglia,

⁴Hobson E.W. (2012). John Napier and the Invention of Logarithms, 1614. (Lecture), Cambridge University Press. London, pp. 43–.ISBN978-1-107-62450-4.

⁵Nicolaus Bernoulli (il Vecchio) commerciante fu il capostipite, non era uno scienziato. I suoi primi figli furono Jakob I, Bernoulli. (1654–1705), maestro del calcolo infinitesimale e Johann I, Bernoulli cruciale per la diffusione del calcolo. Essendo i primi della famiglia gli storici gli attribuirono l'indicazione di "I", accanto al nome, per differenziarli dai loro successori, con il medesimo nome. Ebbero infatti vari discendenti fisici e matematici. Si veda l'albero (cf. www.afsu.it/)

non si limitò a risolvere problemi di fisica, ma interessandosi anche di problemi di economia, fu il primo a capire che il caso, la fortuna e l'azzardo non costituiscono un caos imprevedibile, ma obbediscono a precise leggi matematiche. Fondò su tali imput una nuova scienza: la *Teoria della Probabilità*. Importante anche il fratello minore Johann I (1667–1748), estroso e battagliero. Fu il guerriero arrogante della famiglia, fu più proficuo del fratello in matematica e contribuì molto a diffondere il calcolo differenziale e integrale in Europa. Il suo campo d'attività comprendeva oltre la matematica, la fisica, la chimica e l'astronomia. In scienze applicate, lavorò in ottica, scrisse una *Teoria delle maree* e uno studio matematico sulle vele dei bastimenti, inoltre enunciò il "Principio degli spostamenti virtuali" in meccanica. Interessante che fu allievo di Leibniz e professore di Euler.

La prima citazione del numero di Nepero indicato con la lettera e , compare in due lettere di Gottfried Leibniz a Christian Huygens, del 1690 e del 1691. Fu proprio il matematico e fisico svizzero Leonhard Euler (1707-1783), considerato il più importante matematico del Settecento, allievo di Johann I ed uno dei massimi della storia della matematica, che più di mezzo secolo dopo si occupò del simbolo e , che viene appunto anche detto numero di Eulero. Fu Euler che usa la lettera e per tale costante e il primo uso di e compare nella *Mechanica* di Eulero (1736), forse scelto perché iniziale della parola esponenziale. La sua definizione formale e una sua prima approssimazione sono dati da:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 2.7182818284590452353602$$

Occorre qualche precisazione sull'esistenza e la finitezza dell'indicato limite. Servono un paio di teoremi.

/discipline/matematica/profili e periodi/ /matematici tra 1700 e 1800/Bernoulli famiglia).

Teorema 6.1. *La successione $(1 + \frac{1}{n})^n$ è crescente, essendo:*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Dimostrazione. È ben noto che dati $n+1$ numeri reali: $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ tutti positivi, e un esponente naturale $n \geq 2$, la media geometrica di questi è sempre minore o eguale della media aritmetica. Si ha:

$$\sqrt[n+1]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n+1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}}{n+1}$$

valendo il segno = se e solo se $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1}$. Presi allora: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1 + \frac{1}{n}$ e $x_{n+1} = 1$, non tutti coincidenti, si ha:

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}$$

elevando ambo i membri ad $n+1$, si ha:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left[\frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}\right]^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

□

È ben noto che una successione monotona ammette sempre limite finito o infinito. Se la successione è crescente (decrecente) il limite coincide con l'estremo superiore (inferiore). Se inoltre la successione è anche limitata superiormente (inferiormente), tale limite esiste finito. Dimostriamo che la successione in esame è limitata

Teorema 6.2. *Per ogni naturale $n > 1$, si ha:*

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \\
 &+ \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} = \\
 &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-(k-1)}{n} = \\
 &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

segue:

$$\begin{aligned}
 2 &< \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \\
 &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \\
 &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \\
 &< 1 + 2 = 3
 \end{aligned}$$

□

Conseguenze

Segue, posto $1/m = x/n$, $n = xm$, la più generale espressione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{mx}\right)^{mx}\right] = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^x = e^x$$

Si hanno le seguenti serie convergenti per ogni x reale:

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
 \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}
 \end{aligned}$$

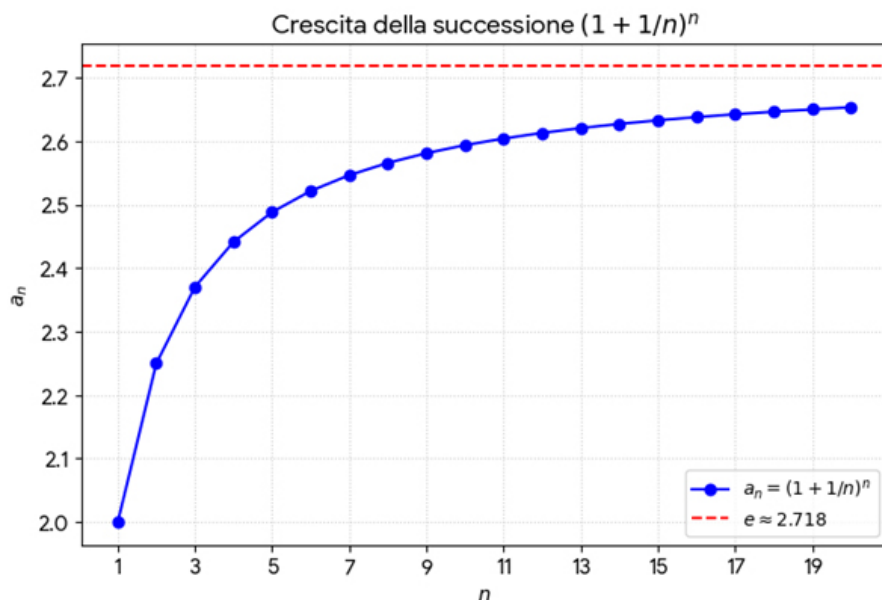


Fig. 5

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

mentre la serie logaritmica:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}$$

converge per $-1 < x \leq 1$, diverge altrimenti.

Completiamo le considerazioni espone con l'introdurre le funzioni iperboliche.

Poniamo per definizione:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (25)$$

dalle quali si ha:

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Per $\sinh x$ e $\cosh x$ si hanno i seguenti sviluppi in serie:

$$\sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Il punto $P(x, y) = (\cosh x, \sinh x)$ descrive l'iperbole equilatera di equazione:

$$x^2 - y^2 = 1$$

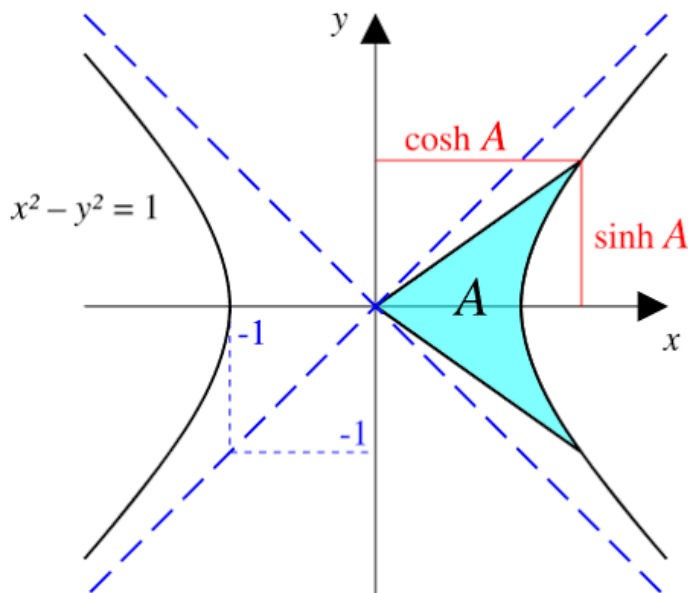


Fig. 6 - L'argomento delle funzioni iperboliche

Si noti che l'argomento (x) delle funzioni iperboliche è pari a due volte l'area indicata in figura 6, ovvero $(x) = 2A$.

Si può sviluppare una intera trigonometria iperbolica. Noi mostreremo solo come ricavare le formule di addizione delle aree:

$$\cosh(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \frac{e^b + e^{-b}}{2} - \frac{e^a - e^{-a}}{2} \frac{e^b - e^{-b}}{2}$$

da cui, tenendo conto delle (25)

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \quad (26)$$

Analogamente si prova:

$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a \quad (27)$$

Da notare infine che la curva di equazione:

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (28)$$

prende il nome di catenaria ed è una curva di notevole interesse, presente in natura. Essa si presenta nel momento che appendiamo una catena a due chiodi, con la lunghezza maggiore a quella della distanza dei due chiodi, posti a egual altezza da terra, con la catena soggetta alla forza peso.

La curva “seno iperbolico” di equazione $y = \sinh x$ è meno importante e la sua immagine sembra confondersi con la parabola piana cubica.

Nota 6.2. *Il primo a esaminare la catenaria come curva fu Galileo Galilei nel 1638. Nella seconda giornata dei Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze, egli ipotizzò che la forma di una catena appesa per i suoi estremi, per via della forza di gravità potesse essere una parabola. Ma nella quarta giornata dello stesso dialogo, egli chiarisce vi è una netta distinzione tra la nuova curva catenaria e una parabola. Nel 1669 Joachim Jungius (1587-1657), professore a Giessen, dimostrò che la curva in questione non era una*



Fig. 7 - La Catenaria.

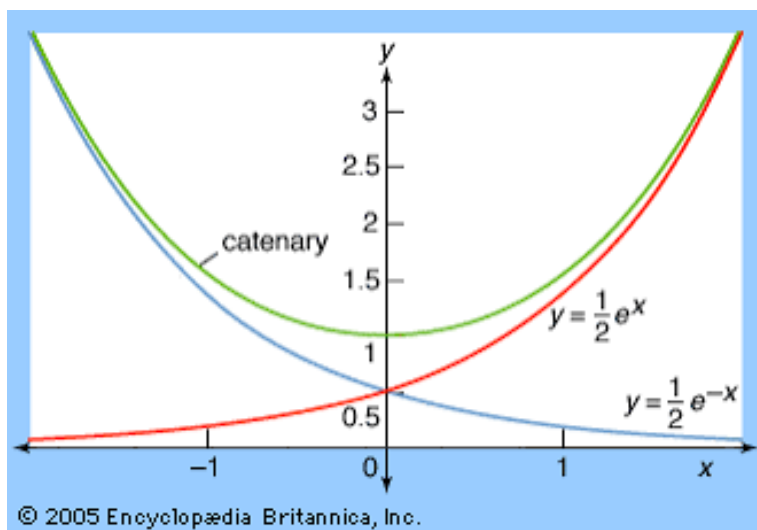


Fig. 8 - La Catenaria, media di esponenziali.

parabola. Nel 1691 Christian Huygens (1629-1695), Gottfried Leibniz (1646-1716) e Johann Bernoulli⁶ (1667-1748) dimostrarono che

⁶Nicolaus Bernoulli (il Vecchio) commerciante fu il capostipite, non era uno scienziato. I suoi primi figli furono Jakob I, Bernoulli. (1654–1705): Maestro del calcolo infinitesimale e Johann I, Bernoulli cruciale per la diffusione del calcolo. Ebbero vari discendenti fisici e matematici. Si veda l'albero (cf. www.afsu.it)

questa curva era una curva non algebrica, la curva fu chiamata catenaria dallo stesso Huygens, ma anche funicolare e velaria. Fu studiata anche da Leonhard Euler(1707-1783) che nel 1744 provò che la sua rotazione attorno all'asse delle ascisse genera una superficie minima cui diede il nome di catenoide.

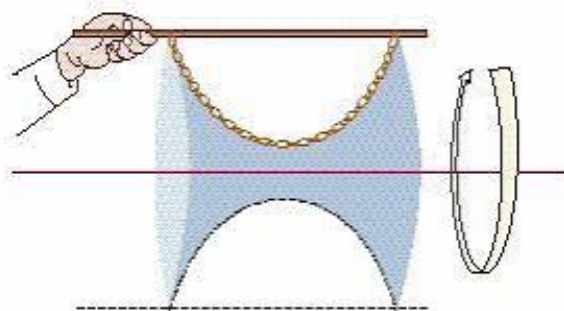


Fig. 9 - Catenaria e Catenoid.

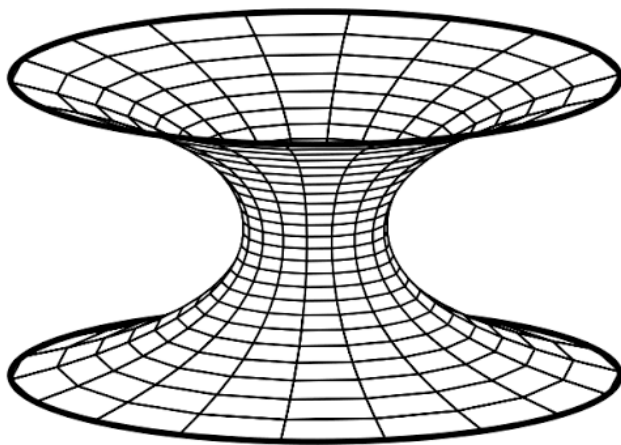


Fig. 10 - Catenaria.

/discipline/matematica/profili e periodi/ /matematici tra 1700 e 1800/Bernoulli famiglia).

Ricordiamo che una superficie si dice minima se la sua curvatura media $(k_1 + k_2)/2$ è nulla in ogni punto, il che significa che le due curvature principali sono opposte ($k_1 = -k_2$). Dal punto di vista fisico le superficie minime rappresentano la forma che assume una pellicola di sapone, quando viene tesa su un contorno filiforme. Le più famose sono il piano, la Catenoide e l'Elicoide (che è rigata). Il Problema di Plateau⁷ consiste nello studio dell'esistenza di una superficie minima, che abbia come bordo una data curva chiusa dello spazio.

Per tornare alla catenaria ricordiamo anche che la sua forma rovesciata è sfruttata per creare archi e cupole strutturalmente efficienti, che distribuiscano il peso in modo ottimale, riducendo al minimo le spinte laterali e i materiali. Infatti quando è invertita, la curva catenaria lavora esclusivamente a compressione, eliminando la necessità di contrafforti esterni, a differenza degli archi a tutto sesto.

Fu Anton Gaudí y Cornet (1852-1926), il celebre architetto catalano, che ha reso famosa la catenaria, utilizzandola ampiamente nei suoi progetti, tra cui l'uso nella Cripta della Colonia Güell, nei sottotetti di Casa Batlló e Casa Milà (La Pedrera), e nella navata principale della Sagrada Família sempre a Barcellona, progettando mediante modellini fisici in scala con fili, corde e pesi per determinare la forma ideale di archi e volte. La forma ottenuta, una volta invertita, rappresentava la struttura a compressione ideale.

Nota 6.3. Importanza delle funzioni esponenziali. *La funzione esponenziale è di grande interesse perché è atta a descrivere sia la crescita rapida sia il decadimento, modellando fenomeni naturali come le popolazioni, le epidemie e la finanza. Le sue applicazioni chiave riguardano la crescita naturale e il decadimento radioattivo. Misura*

⁷Il problema fu proposto da Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) nel 1760, tuttavia prende il nome dal fisico belga Joseph Plateau (1801-1883) che fece esperimenti su di esso tramite bolle di sapone. Plateau è noto, in particolare, per l'invenzione, nel 1832, di uno strumento ottico, il fenachistoscopio, che permetteva di visualizzare immagini animate: questa invenzione contribuì allo sviluppo della tecnica cinematografica.



Fig. 11 - Arco di catenoide rovesciata.

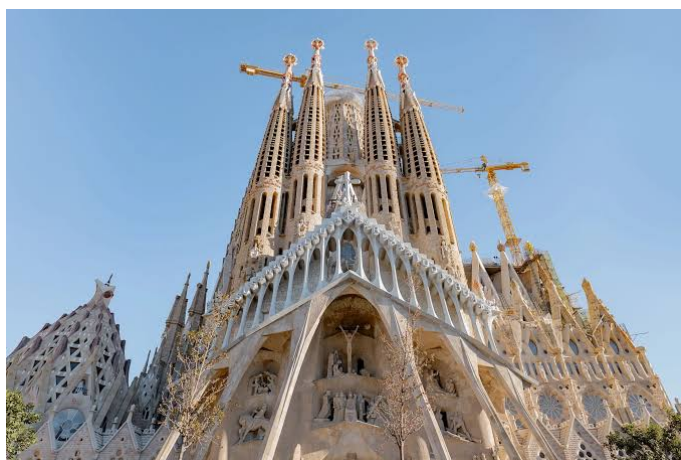


Fig. 12 - La catenaria usata da Gaudí.

la moltiplicazione dei batteri o la diffusione di un virus nel tempo, misura il decadimento degli atomi radioattivi o la carica di un condensatore. Determina il calcolo dell'interesse composto sugli investimenti bancari. È atta a rendere le formule pulite e prive di costanti residue. La derivata di $y = \ln x = \log_e x$, ($x > 0$) è semplicemente



Fig. 13 - Un interno di Gaudì.

$1/x$. Per qualsiasi altra base b , la derivata della funzione $y = \log_b x$ introduce un fattore di correzione essendo $y' = 1/(x \ln b)$. Altra interessante proprietà è che la funzione esponenziale $y = e^x$, è l'unica funzione che coincide esattamente con la sua derivata, avendosi $y' = y = e^x$. Nel caso di $y = a^x$, la derivata è $y' = a^x \ln a$. Inoltre la funzione $y = \ln x$ limitata tra la retta $x = 1$ ed $x = \text{qualsiasi}$ ($x > 1$) rappresenta, da un punto di vista geometrico l'area racchiusa dall'iperbole $y = 1/x$ ($x \geq 1$) dall'asse delle ascisse e dalle rette verticali da 1 ad x ($x > 1$), in quanto:

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$$

. È l'inversa della funzione logaritmo $y = \ln x$. La curva gaussiana, nota anche come "distribuzione normale o a campana", è una funzione di probabilità continua simmetrica definita da due parametri principali: la media μ e la deviazione standard σ , e costanti importanti in statistica. La curva a campana è data da:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Nota 6.4. Mnemonica di e. Anche se in generale il susseguirsi delle cifre decimali di *e* non ha alcuna regolarità, le prime presentano un andamento curioso. Osserviamole: 2, 718281828459045.... Memorizzare una serie di cifre consiste nell'imparare una frase (in versi) in cui ogni parola ha il numero di lettere della cifra corrispondente. Nel caso di *e*, la prima parola deve avere 2 lettere, la seconda 7, la terza 1, la quarta 8 e così via. Nel 1935 la rivista «Sapere» indisse un concorso chiedendo ai lettori di presentare una frase o filastrocca dedicata al numero *e*. Eccone alcune:

1. La fedeltà è promessa, la felicità è speranza, la gioventù sola resta illusione
2. La bambina è affamata, la minestra è squisita, la scodella vien tosto terminata
3. La suocera è serpente, se ammalata è arsenico, se moritura, pace
4. Ai modesti o vanitosi, ai violenti o timorosi do, cantando gaio ritmo, logaritmo.

Tutte si fermavano al massimo dopo 12 cifre decimali, il motivo è evidente: la cifra successiva è 0.

7 Bibliografia

1. Bononcini Vittorio Emanuele (1965). *Istituzioni di Matematica*. Bologna: Ed. Patron.
2. Cajoroi Florian (1929). *A History of Mathematical Notations*, vol.I-II, Publ. Company "La Salle", Illinois
3. Cimmino Gianfranco (1953). *Istituzioni di Analisi Matematica*. Bologna: Ed. Patron.

4. De Finetti Bruno (1971). "Tre personaggi della Matematica: i numeri e, i, π ". In: «*Le Scienze*» n.39 (novembre del 1971 - edizione italiana di «Scientific American»), pp. 86–99, Milano: Editore Le Scienze S.P.A.
5. Eugeni Franco, Liberatore Antonio (1983). "Sulle potenze ad esponente frazionario", pp.126-137 in: *Atti del Convegno nazionale Mathesis "La matematica nell'educazione"*, Monopoli 26-30 Aprile 1981, Editrice Luciani, Roma.

8 Sitografia

1. [https://it.wikipedia.org/wiki/Potenza_\(matematica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Potenza_(matematica))
2. https://it.wikipedia.org/wiki/Prime_100000_cifre_di_e