

Analisi trigonometrica del secondo libro di Archimede sui corpi galleggianti

Vittorio Bovolin*

DOI:10.53159/PdM(V).v1n2.173

Ricevuto 21-09-2026 Accettato 22-09-2026 Pubblicato 30-09-2026



Abstract: *Archimedes' treatise "On Floating Bodies" is the most significant text in Hellenistic science regarding the application of geometry to the solution of a physical problem. The technical and scientific significance of the treatise lies in the fact that it does not merely deals with the conditions of global equilibrium (so called Archimede's Principle), but it also addresses the more complex issue of analysing the stability of the equilibrium conditions. This paper focuses on presenting the content of the even-numbered Propositions in Book II, expressing them applying the tools of modern trigonometry. This approach makes it possible to highlight the comprehensive understanding that the treatise offers regarding a problem of great*

*Dipartimento Ingegneria Civile Università di Salerno, Fisciano, Italia;
v.bovolin@unisa.it.

practical importance as the stability of floating bodies. The methodological framework established in the Treatise transcends the specific results related to the segment of a paraboloid used by Archimedes, providing a solid theoretical foundation applicable to solids of different shapes.

Keywords: Archimedes; Floating bodies; Hellenistic science

Sommario: *Il Trattato di Archimede sui Corpi galleggianti è il più significativo testo della scienza ellenistica che riguarda l'applicazione della geometria alla risoluzione di un problema fisico. La rilevanza tecnico-scientifica del Trattato consiste nel fatto che esso non si limita alla sola definizione delle condizioni di equilibrio globali (cosiddetto Principio di Archimede), ma affronta anche il più complesso problema della analisi della stabilità delle configurazioni dell'equilibrio. La presente Memoria si concentra sulla esposizione del contenuto degli enunciati delle Proposizioni pari del Secondo Libro esprimendoli mediante gli strumenti della moderna trigonometria. Tale approccio permette di focalizzare l'attenzione sulla completezza del quadro conoscitivo che il Trattato fornisce su un problema di rilevante importanza pratica come quello della stabilità dei corpi galleggianti. L'inquadramento metodologico fornito nel Trattato trascende i risultati relativi alla specifica forma di un segmento di paraboloide retto utilizzata da Archimede e fornisce una solida base teorica utilizzabile per successive applicazioni a solidi di forma differente. .*

Parole chiave: Archimede; Corpi galleggianti; Scienza ellenistica

1 La struttura del *Trattato sui corpi galleggianti*

Il *Trattato sui corpi galleggianti* (nel seguito *Trattato*) si compone di due libri: nel Primo Libro Archimede affronta il problema della definizione della condizione di equilibrio globale di un corpo galleggiante, mentre nel Secondo Libro approfondisce la questione relativa alla stabilità delle configurazioni di equilibrio. Il Primo Li-

bro contiene il postulato iniziale e 9 Proposizioni, mentre il Secondo Libro contiene 10 Proposizioni.

1.1 Primo Libro: condizione di equilibrio globale

Per una illustrazione ed analisi di dettaglio del contenuto del Primo Libro si rimanda a Bovolin (2025).

Archimede, nei primi 7 teoremi del Primo Libro, dimostra i diversi aspetti di ciò che viene comunemente indicato come il “Principio di Archimede”.

Tali teoremi sono oggi sintetizzati con l’affermazione che il peso $\vec{P}$ di un corpo galleggiante è equilibrato dalla azione $\vec{A}$ (detta spinta di Archimede) esercitata dal liquido sul contorno della porzione del corpo galleggiante immersa nel liquido stesso.

La spinta $\vec{A}$ è pari al peso del volume di liquido occupato dalla porzione immersa del corpo galleggiante.

In termini algebrici la condizione di equilibrio globale si esprime come $P = A$, dove P e A sono rispettivamente i moduli di $\vec{P}$ e di $\vec{A}$.

1.2 Secondo Libro: stabilità delle condizioni di equilibrio

Il problema dell’analisi della stabilità delle configurazioni di equilibrio di un corpo galleggiante è l’oggetto del Secondo Libro. L’analisi di stabilità è svolta assegnando al corpo galleggiante, inizialmente in equilibrio, una perturbazione consistente in una rotazione del corpo, il successivo studio della disposizione dei punti di applicazione delle forze $\vec{P}$ e $\vec{A}$ nella posizione perturbata consente di stabilire se il corpo:

- rimane in equilibrio nella nuova posizione (equilibrio indifferente);
- reagisce con una coppia che riporta il sistema nella condizione di equilibrio iniziale (equilibrio incondizionatamente stabile);

- reagisce con una coppia che amplifica la perturbazione iniziale (equilibrio instabile) e che indirizza il sistema verso una nuova condizione di equilibrio stabile.

L'analisi della stabilità è introdotta nelle Proposizioni finali I-8 e I-9 del Primo Libro con riferimento al caso semplice di un segmento sferico.

2 Analisi delle Proposizioni I-8 e I-9

Le Proposizioni I-8 e I-9 affrontano lo studio della stabilità dell'equilibrio di un segmento sferico: nella Proposizione I-8 la base del segmento sferico è rivolta verso l'alto, mentre nella Proposizione I-9 la base è rivolta verso il basso.

Archimede in tutto il *Trattato* concentra la propria analisi sulle sole configurazioni di equilibrio che non intersecano la base del solido considerato, in altri termini la base del solido risulta sempre completamente emersa o completamente immersa.

Lo schema duale introdotto nelle Proposizioni I-8 e I-9 è riproposto anche nel Secondo Libro dove due Proposizioni successive fanno riferimento alla stessa configurazione geometrica: le Proposizioni pari con la base rivolta verso l'alto e le successive Proposizioni dispari con la base rivolta verso il basso.

Per sviluppare l'analisi di stabilità è necessario determinare la posizione dei punti di applicazione delle forze $\vec{P}$ e $\vec{A}$.

La forza $\vec{P}$ è applicata nel baricentro delle masse del corpo galleggiante.

Nel *Trattato*, e nel prosieguo del presente articolo, la densità ρ_s del corpo galleggiante è assunta costante, cosicché il baricentro delle masse del corpo galleggiante coincide con quello geometrico.

Archimede, per quanto riguarda la spinta $\vec{A}$ esercitata dal fluido, al termine della Proposizione I-7 scrive:

Si supponga che ogni solido spinto nel fluido in alto sia condotto per [una linea] perpendicolare diretta secondo il [proprio] centro del peso (Fleck, 2016) indicando che la spinta $\vec{A}$ agisce nel baricentro geometrico della porzione immersa.

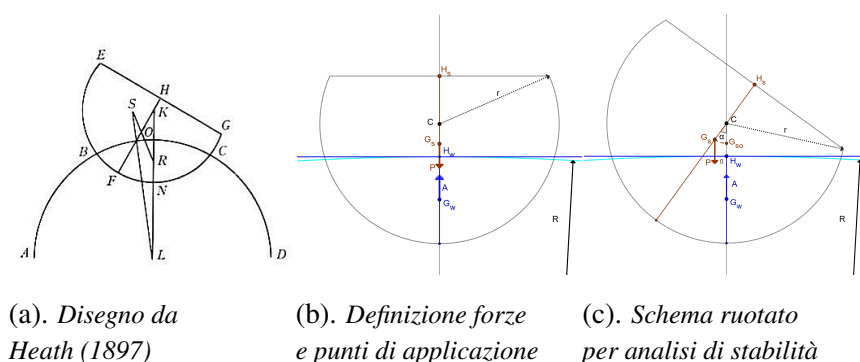


Fig.1 - Rappresentazione grafica della Proposizione I-8

Per quanto riguarda il “modello meccanico del mondo” Archimede nel postulato iniziale del Primo Libro introduce il modello di “gravità sferica”.

Secondo tale modello la gravità è diretta verso il centro della Terra, le superfici isobariche sono sfere concentriche con il centro della Terra stessa e porzioni della superficie del liquido sono rappresentabili mediante archi di circonferenza.

Archimede utilizza la gravità sferica nelle prime 5 Proposizioni del Primo Libro, mentre nelle successive due Proposizioni I-6 e I-7 e poi nell’intero Secondo Libro, senza commenti e/o spiegazioni, passa al modello di “gravità verticale o ortogonale”.

Nel modello di “gravità verticale” la gravità agisce in direzione “verticale” o, più correttamente, in direzione “ortogonale” al piano tangente alla sfera terrestre, conseguentemente le superfici isobariche, compresa la superficie liquida, risultano orizzontali.

La rappresentazione del caso proposto nella Proposizione I-8 relativo alle condizioni di equilibrio di un segmento sferico con la base rivolta verso l’alto è riportata nella figura 1.

Nelle ultime due Proposizioni I-8 e I-9 del Primo Libro Archimede ritorna al modello di gravità sferica.

Le motivazioni del ritorno alla gravità sferica non sono spiegate, si può ipotizzare che la gravità sferica, consentendo di identificare con immediatezza la posizione del centro della Terra (figura 1a),

possa aiutare a introdurre più facilmente i diversi elementi geometrici che fanno parte dell'analisi di stabilità dell'equilibrio.

Con riferimento alla figura 1a del testo Archimedeo appare ragionevole ritenere che in tale disegno le scale geometriche di rappresentazione utilizzate per le rappresentazioni della Terra e del corpo galleggiante non siano uguali.

In particolare si deve ritenere che il segmento di sfera rappresentativo del corpo galleggiante sia, per ovvi motivi di rappresentazione grafica dei diversi elementi geometrici contenuti al suo interno, significativamente dilatato rispetto alle dimensioni effettive.

L'ipotesi di una scala di rappresentazione unica porrebbe due problemi concettuali:

- il primo riguarderebbe la identificazione e la natura stessa del corpo galleggiante considerato che esso avrebbe dimensioni geofisiche confrontabili con quelle della Terra stessa che lo allontanerebbe dall'idea comune di corpo galleggiante;
- il secondo, come messo in evidenza da Rorres (2016), riguarderebbe la circostanza che in tale caso lo schema meccanico di equilibrio dovrebbe tenere conto di effetti del secondo ordine che sono invece ignorati nelle dimostrazioni di Archimede.

Nelle figure 1b e 1c le superfici liquide sono disposte orizzontalmente e, come mero riferimento grafico, si è anche riportato l'arco relativo a una superficie sferica avente un raggio R pari a 20 volte il raggio r del segmento sferico.

Nell'approccio moderno il peso $\vec{P}$ del corpo galleggiante è applicato nel baricentro G_s del corpo galleggiante stesso mentre la spinta $\vec{A}$ è applicata nel baricentro G_w del volume immerso.

I baricentri G_s e G_w sono inizialmente allineati (*lungo asse del segmento sferico che giace sul raggio che congiunge il centro della Terra O con il centro del segmento sferico C)/(lungo la direzione verticale)* (figure 1a e 1b).

Nel caso in esame le proprietà di simmetria del segmento sferico semplificano lo studio delle condizioni di equilibrio (figura 1c) in

quanto il polo di rotazione del segmento sferico deve coincidere con il proprio centro C , ne consegue che a seguito di una rotazione:

- la forma del volume immerso V_w risulta immutata;
- la posizione di G_w risulta immutata;
- il centro della Terra O , il centro del segmento sferico C e il baricentro G_w rimangono allineati lungo il raggio iniziale (*lungo la direzione verticale*);
- il baricentro G_s segue rigidamente la rotazione del corpo galleggiante intorno a C disallineandosi rispetto al raggio iniziale (*gravità sferica*) o, in alternativa, alla direzione verticale sulla quale sono disposti C e G_w (*gravità verticale*);
- la coppia formata dal peso $\vec{P}$ e dalla spinta di Archimede $\vec{A}$ risulta opposta a quella della rotazione iniziale e tende a riportare il sistema nella posizione di equilibrio iniziale.

Nella Proposizione II-8 Archimede dimostra quindi che, qualunque siano le caratteristiche del segmento sferico considerato e qualunque sia la rotazione iniziale che non “bagni” la base, la configurazione di equilibrio verticale risulta incondizionatamente stabile.

3 Analisi delle Proposizioni del Secondo Libro

Il Secondo Libro affronta il caso più complicato della stabilità dell’equilibrio di un segmento di paraboloide parzialmente immerso.

In tale caso, a seguito di una rotazione, entrambi i baricentri G_s del segmento di paraboloide e G_w della porzione immersa cambiano la propria posizione.

La rappresentazione grafica di un paraboloide di rotazione e di due piani secanti è riportata nella figura 2.

Il volume delimitato intersecando un paraboloide di rotazione retto (semi-assi a e b uguali) con un piano non parallelo all’asse è

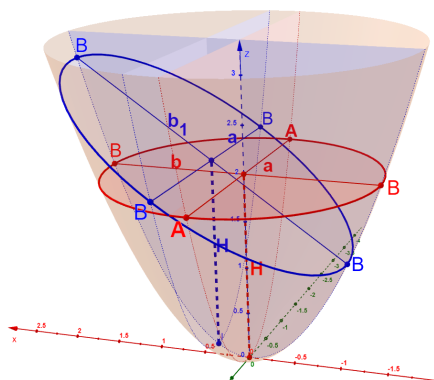


Fig.2 - Paraboloide di rotazione

detto “*segmento di paraboloide retto*” (nel seguito segmento di paraboloide), la figura piana delineata sul piano secante è detta “*base del segmento*”, il contorno della base è detto “*spigolo del segmento*”.

La forma della base dipende dalla inclinazione del piano secante:

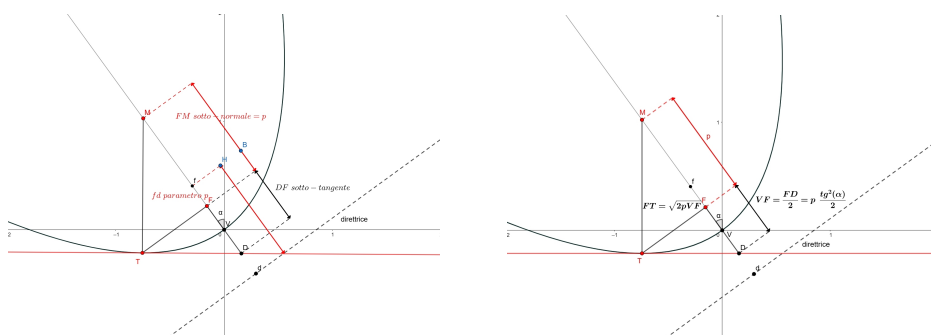
- se il piano secante è ortogonale all’asse del paraboloide la base risulta un cerchio di raggio a ;
- se il piano secante è obliquo rispetto all’asse del paraboloide la base risulta una ellisse di semi assi a e b .

Nelle Proposizioni del Secondo Libro, Archimede rappresenta graficamente il segmento di paraboloide mediante la parabola base ottenuta secando il segmento di paraboloide con il piano che contiene l’asse maggiore b della ellisse.

Nel presente articolo la parabola base è descritta mediante l’equazione:

$$y = \frac{x^2}{2p} \quad (1)$$

Nella figura 3 sono specificate le proprietà della parabola base con riferimento al parametro p , alla sotto-normale FM ed alla sotto-tangente DF .



(a). Parametro p , Sotto-normale FM e Sotto-tangente DF

(b). Relazioni tra FT , VF e Sotto-tangente DF

Fig.3 - Proprietà geometriche della parabola base del segmento di paraboloido

Il parametro p della parabola base risulta pari alla distanza fd tra il fuoco f della parabola e la retta direttrice d ed è doppio della distanza focale tra il fuoco f ed il vertice V della parabola stessa

Il segmento FM corrisponde alla moderna sotto-normale, mentre il segmento FD corrisponde alla sotto-tangente.

La sotto-normale FM ha una lunghezza costante, indipendente dalla inclinazione α del paraboloido, pari al parametro p .

Il segmento VF ha una lunghezza pari a metà della sotto-tangente FD :

$$VF = \frac{FD}{2} = p \frac{\tan^2(\alpha)}{2} \quad (2)$$

3.1 Stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloido su un piano di appoggio orizzontale.

Seguendo il suggerimento di Russo (2019) lo studio delle condizioni di equilibrio di un segmento di paraboloido posto su un piano di appoggio orizzontale (figura 4), può rappresentare una utile introduzione al più complesso caso di un segmento di paraboloido immerso fornendo utili indicazioni sui ragionamenti utilizzati nel *Trattato*.

La condizione di equilibrio globale impone che sia $P = R$.

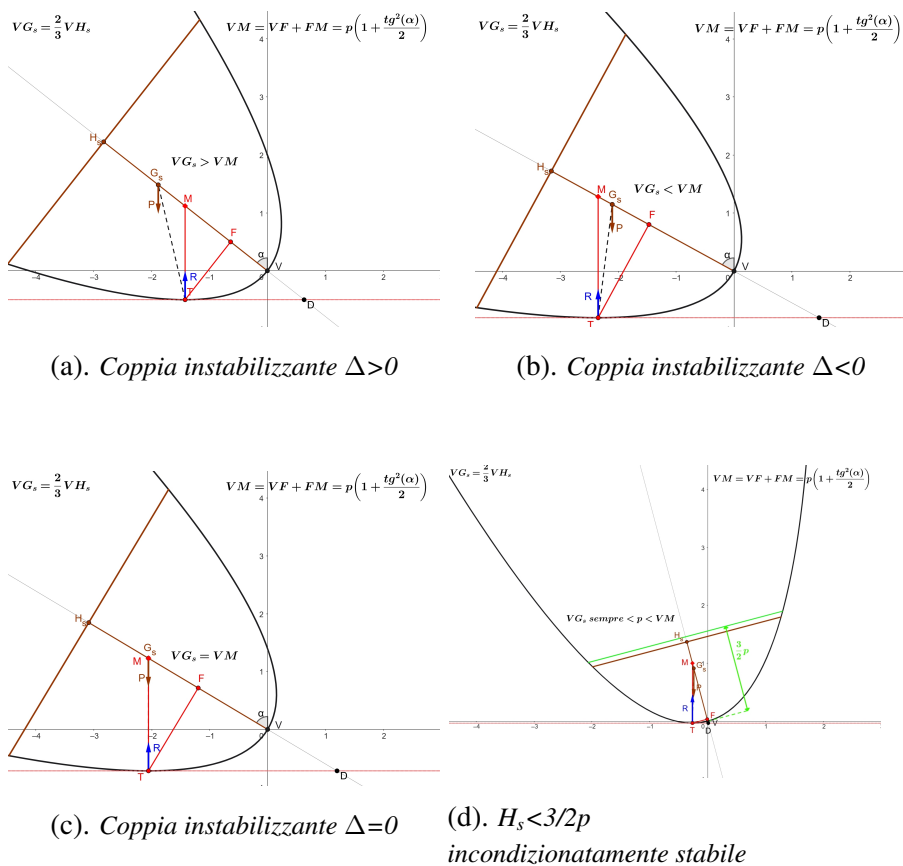


Fig.4 - Schemi grafici per l'analisi della stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloide su un piano di appoggio orizzontale

Per studiare le condizioni di stabilità dell'equilibrio bisogna valutare le posizioni dei punti di applicazione del peso $\vec{P}$ del segmento di paraboloide e della reazione $\vec{R}$ del piano di appoggio.

Il peso $\vec{P}$ è applicato nel baricentro G_s del segmento di paraboloide, mentre la reazione $\vec{R}$ è applicata nel punto T di contatto tra il paraboloide ed il piano di appoggio, nel punto T la tangente al paraboloide risulta "orizzontale".

Il sistema è in equilibrio quando le forze $\vec{P}$ e $\vec{R}$ sono allineate lungo la stessa verticale.

Si considerino le seguenti distanze valutate a partire dal vertice V della parabola lungo l'asse del paraboloide inclinato:

- d_{Gs} distanza VG_s del baricentro G_s della sezione solida (rimane costante al variare della inclinazione α del paraboloide);
- d_M distanza VM del punto M proiezione del punto T sull'asse del paraboloide (varia al variare della inclinazione α del paraboloide).

Archimede ha dimostrato che il baricentro G_s di un segmento di paraboloide retto è posto lungo l'asse del segmento ad una distanza dal vertice V pari a $2/3$ della altezza H_s per cui:

$$d_{Gs} = \frac{2}{3}H_s \quad (3)$$

L'osservazione della figura 4 evidenzia che la proiezione M si trova ad una distanza d_M dal vertice V del paraboloide pari alla somma del segmento VF al quale bisogna aggiungere la lunghezza del segmento FM .

La distanza d_M risulta pertanto:

$$d_M = p \frac{tg^2(\alpha)}{2} + p \quad (4)$$

definendo δ come:

$$\delta = d_M - d_{Gs} \quad (5)$$

e sostituendo le (3) e (4) nella (5) si ottiene:

$$\delta = p \frac{tg^2(\alpha)}{2} + p - \frac{2}{3}H_s \quad (6)$$

L'espressione della condizione di equilibrio $\delta = 0$ risulta:

$$p \frac{tg^2(\alpha)}{2} + p - \frac{2}{3}H_s = 0 \quad (7)$$

le cui radici sono:

$$tg(\alpha) = \pm \sqrt{\frac{4}{3} \frac{H_s}{p} - 2} \quad (8)$$

e il cui determinante è:

$$\Delta = \frac{4}{3} \frac{H_s}{p} - 2 \quad (9)$$

Ne consegue che quando:

- $H_s > 3/2p$ (figure 4a, 4b e 4c) essendo $\Delta > 0$ esistono 2 soluzioni reali (rotazione destrogiro o levogiro) e l'angolo di equilibrio α_{eq} risulta:

$$\alpha_{eq} = arctg \left(\pm \sqrt{\frac{4}{3} \frac{H_s}{p} - 2} \right) \quad (10)$$

- $H_s < 3/2p$ (figura 4d), essendo $\Delta < 0$ non esistono soluzioni reali e l'equilibrio risulta incondizionatamente stabile.

Le rappresentazioni grafiche delle soluzioni relative al campo $H_s > 3/2p$ sono riportate nelle figure 4a, 4b e 4c, dalle quali si ricava che quando:

- $\delta = d_M - d_{Gs} < 0$ la coppia formata da $\vec{P}$ e $\vec{R}$ è levogiro e amplifica la rotazione iniziale (figura 4a);
- $\delta = d_M - d_{Gs} > 0$ la coppia formata da $\vec{P}$ e $\vec{R}$ è destrogiro e si oppone alla rotazione iniziale (figura 4b);

- $\delta = d_M - d_{Gs} = 0$ la condizione è di equilibrio (figura 4c).

Il segmento di paraboloide, supposto inizialmente in posizione verticale, ruota su un lato fino a raggiungere l'angolo di equilibrio a_{eq} , in corrispondenza del quale il peso $\vec{P}$ e la reazione $\vec{R}$ giacciono lungo la stessa verticale e la proiezione M coincide con il baricentro G_s (figura 4c).

Se, a partire da questa condizione, si applica una qualsiasi ulteriore rotazione (figure 4a e 4b) il sistema reagisce con una coppia che riporta il sistema nella condizione di equilibrio α_{eq} .

La condizione di equilibrio incondizionatamente stabile $H_s < 3/2p$ è rappresentata nella figura 4d.

Esprimendo nella (9) il determinante Δ in funzione della distanza d_{Gs} (eq. 3) si ottiene:

$$d_{Gs} < p \quad (9')$$

La circostanza che la sotto-normale di una parabola è una quantità costante pari al parametro p comporta che quando $d_{Gs} < p$ la proiezione M si trova sempre al di sopra del baricentro G_s del segmento stesso.

Tale condizione comporta che qualunque sia la rotazione iniziale che viene applicata, la coppia che si determina è sempre diretta in verso opposto a quello della rotazione imposta e ristabilisce la condizione di equilibrio verticale.

Dal punto di vista geometrico si può ancora osservare che la componente di d (eq. 6) legata alla sotto-tangente aumenta con l'aumentare della inclinazione a , ne consegue che il minimo della distanza d si verifica quando il segmento di paraboloide è posto in posizione verticale, quindi, se il segmento di paraboloide è in condizione di equilibrio stabile in posizione verticale, lo è anche per tutte le altre configurazioni.

3.2 Stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloide immerso

Nella figura 5 sono riportate due rappresentazioni della parabola base del segmento di paraboloide immerso.

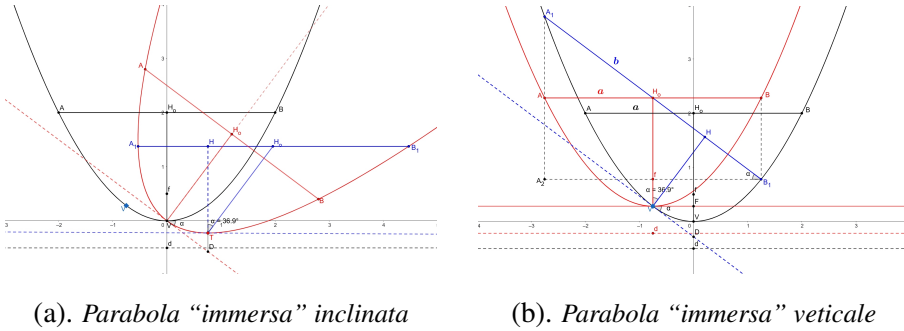


Fig.5 - Modalità di rappresentazione del segmento paraboloido immerso

Nella figura 5a il segmento di paraboloido immerso è rappresentato nella configurazione “naturale” nella quale il segmento di paraboloido è inclinato e la corrispondente superficie liquida è disposta orizzontalmente

Nella figura 5b la rappresentazione del sistema è di tipo “concettuale”: la condizione di immersione è rappresentata dalla parabola disposta verticalmente il cui vertice V giace lungo la parabola base ed è traslato verso l’alto della quantità VF .

La superficie liquida risulta inclinata ed è parallela alla tangente alla parabola base nel vertice V della parabola traslata.

La rappresentazione concettuale della figura 5b) permette, di ritrovare facilmente la dimostrazione di Archimede che “i volumi di un segmento di paraboloido verticale e di un segmento di paraboloido inclinato sono uguali quando lo sono i rispettivi assi.”

È noto che il volume W di un segmento di paraboloido è pari al doppio del volume del cono inscritto nel segmento di paraboloido stesso.

Considerando i semiassi a e b della base del segmento (figure 2 e 5b) e le proprietà della parabola nel caso di segmento di paraboloido verticale (figura 4b) la base è circolare e il volume del segmento W di paraboloido è:

$$W = \frac{2}{3}\pi a^2 V H_o \quad (11)$$

Quando segmento di paraboloide è inclinato (figura 4b) la base è una ellisse ed il volume W risulta:

$$W = \frac{2}{3}\pi abVH \quad (11')$$

in base alla similitudine dei triangoli H_oVH e $A_1B_1A_2$ risultano le due identità trigonometriche:

$$b = \frac{A_1B_1}{2} = \frac{AB}{2\cos(\alpha)} = \frac{a}{\cos(\alpha)}$$

$$VH = VH_o\cos(\alpha)$$

che sostituite nella (11') ne dimostrano la uguaglianza con la (11).

3.3 Enunciati delle Proposizioni pari II-2, II-4, II-6 e II-8.

Sia H_s l'asse del segmento di paraboloide rappresentativo del corpo galleggiante e sia H_w l'asse della porzione del segmento di paraboloide immersa. Per comodità del lettore si riportano di seguito gli enunciati delle Proposizioni pari II-2, II-4, II-6 e II-8 del Secondo Libro:

Proposizione II-2

I segmenti di paraboloide retti per i quali $H_s < 3/2p$ sono in condizione di equilibrio incondizionatamente stabile qualunque sia la densità del corpo galleggiante.

Proposizione II-4

I segmenti di paraboloide retti per i quali $H_s > 3/2p$ sono in condizione di equilibrio incondizionatamente stabile quando risulta soddisfatta la disuguaglianza $H_s - H_w < 3/2p$.

Proposizione II-6

I segmenti di paraboloide retti per i quali $H_s < 15/4p$, e quando non è rispettata la condizione del postulato 4 ($H_s - H_w < 3/2p$), hanno superfici di equilibrio che sono sempre interne al segmento stesso, in altri termini esse non tagliano la base del segmento.

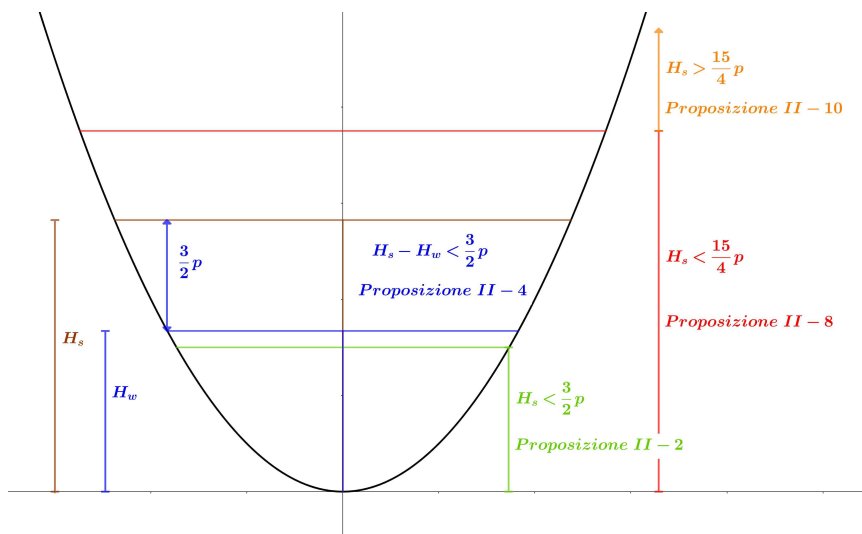


Fig.6 - Rappresentazione grafica della Proposizione I-8

Proposizione II-8

I segmenti di paraboloide retti definiti nella Proposizione II-6 non rimangono in equilibrio verticale, ma ruoteranno fino a quando l'asse formerà con la superficie del liquido l'angolo definito in seguito ...

Una rappresentazione grafica dei campi di applicazioni delle Proposizioni del Secondo Libro è riportata nella figura 6.

3.4 Analisi delle Proposizione II-8, II-4 e II-2

Le Proposizioni II-8, II-4 e II-2 devono essere studiate congiuntamente in quanto il metodo per la determinazione delle condizioni di equilibrio è descritto nella Proposizione II-8.

In effetti si dimostra che la Proposizione II-4 è un caso particolare della Proposizione II-8 e che, a propria volta, la Proposizione II-2 è un caso particolare della Proposizione II-4.

Gli schemi grafici di base per lo studio della stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloide immerso sono riportati nella figura 7.

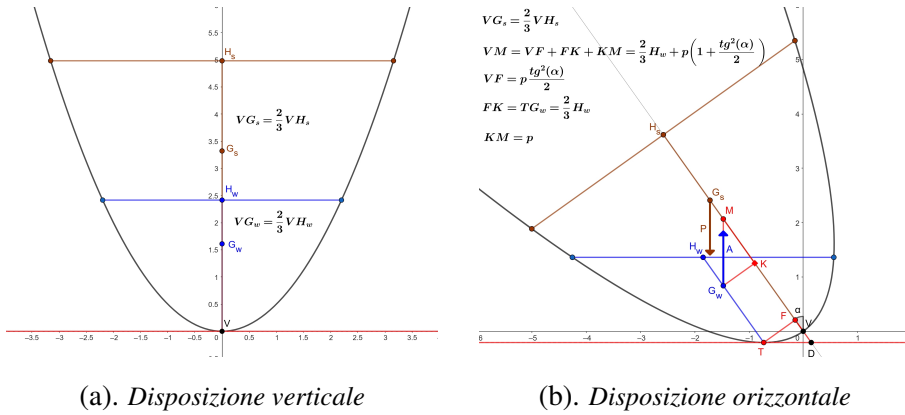


Fig.7 - Schemi grafici per lo studio della stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloide immerso (Proposizione II-8)

Per lo studio delle condizioni di stabilità dell'equilibrio bisogna valutare la posizione del punto di applicazione della spinta di Archimede $\vec{A}$.

La figura 7b mostra che La spinta $\vec{A}$ agisce lungo la verticale passante per il baricentro G_w del volume immerso,

L'asse H_w del segmento di paraboloide immerso è parallelo all'asse inclinato del corpo galleggiante e passa per il punto di tangenza orizzontale T .

Per rispettare la condizione di equilibrio globale il volume immerso deve rimanere costante al variare dell'angolo di inclinazione α , ne consegue che il baricentro G_w della porzione immersa si trova ad una distanza dal punto T pari a $2/3 H_w$.

La distanza d_M della proiezione verticale M del baricentro G_w del volume immerso sull'asse del paraboloide inclinato dal vertice V risulta:

$$d_M = p \frac{tg^2(\alpha)}{2} + \frac{2}{3} H_w + p \quad (12)$$

Tenendo conto della (5), risulta:

$$\delta = \frac{2}{3} (H_s - H_w) - p \left(1 + \frac{tg^2(\alpha)}{2} \right) \quad (13)$$

La condizione di equilibrio è:

$$\frac{2}{3} \frac{H_s - H_w}{p} - 1 - \frac{tg^2(\alpha)}{2} = 0 \quad (14)$$

le cui radici sono:

$$tg(\alpha_{eq}) = \pm \sqrt{\frac{4}{3} \frac{H_s - H_w}{p} - 2} \quad (15)$$

e il cui determinante è:

$$\Delta = \frac{4}{3} \frac{H_s - H_w}{p} - 2 \quad (16)$$

Per cui quando:

$$H_s - H_w > \frac{3}{2}p \quad (17)$$

gli angoli di equilibrio (rotazione destrogira o levogira) risultano:

$$\alpha_{eq} = arctg \left(\pm \sqrt{\frac{4}{3} \frac{H_s - H_w}{p} - 2} \right) \quad (18)$$

Quando invece:

$$H_s - H_w < \frac{3}{2}p \quad (19)$$

non essendoci soluzioni reali, il segmento di paraboloide risulta incondizionatamente stabile.

È immediato osservare che la (19) corrisponde all'enunciato della Proposizione II-4.

La (19) è sicuramente soddisfatta anche quando:

$$H_s < \frac{3}{2}p \quad (20)$$

che corrisponde all'enunciato della Proposizione II-2.

Gli schemi grafici rappresentativi delle soluzioni reali della (13) sono riportati nella figura 8.

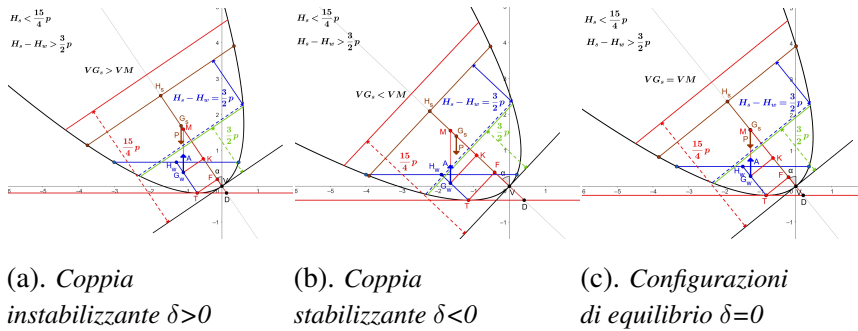


Fig.8 - Schemi grafici per la analisi della stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloide immerso (Proposizione II-8)

Con riferimento alla figura 8 risulta che quando:

$\delta = d_M - d_{G_s} > 0$ la coppia formata da $\vec{P}$ e $\vec{A}$ è levogira e amplifica la rotazione iniziale (figura 8a);

$\delta = d_M - d_{G_s} < 0$ la coppia formata da $\vec{P}$ e $\vec{A}$ è destrogira e si oppone alla rotazione iniziale (figura 8b);

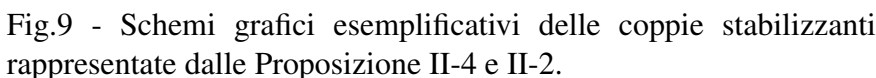
$\delta = d_M - d_{G_s} = 0$ la condizione è di equilibrio (figura 8c);

Gli schemi grafici esemplificativi delle condizioni associate alla Proposizione II-4 (eq. 19) ed alla Proposizione II-2 (eq. 20) sono riportati nella figura 9.

Analogamente al caso rappresentato nella figura 4d, anche nei casi rappresentati nella figura 9, il punto M per costruzione risulta sempre al di sopra del baricentro G_s del corpo galleggiante.

Il confronto tra la (20), relativa al segmento di paraboloide su piano orizzontale, e la (18), relativa al segmento di paraboloide immerso, evidenzia che nel caso di segmento di paraboloide immerso l'angolo di equilibrio risulta minore rispetto al caso su piano orizzontale.

Al tendere della lunghezza dell'asse del segmento di paraboloide immerso H_w a zero la soluzione della (18) tende asintoticamente a quella della (20) che conseguentemente rappresenta la massima inclinazione possibile del segmento di paraboloide immerso.



L'applicabilità dei risultati della Proposizione II-8 è limitata dalla circostanza che il modello utilizzato per la derivazione della condizione di equilibrio stabile definita dalla eq. (18) non tiene conto che l'altezza del segmento di paraboloide H_s è "finita", in altri termini non tiene conto della possibilità che la superficie di equilibrio possa intersecare la base del segmento di paraboloide circostanza che ovviamente modifica lo schema di calcolo geometrico-fisico utilizzato.

Affinché le soluzioni della (18) siano accettabili è pertanto necessario verificare che la superficie liquida di equilibrio non intersechi la base del segmento.

A tal fine nelle Proposizioni II-6 e II-10 Archimede studia la condizione di equilibrio limite relativa alle superfici del liquido aventi le basi vincolate nello spigolo del segmento di paraboloide.

Sia H_{wsp} l'asse della superficie liquida passante per lo spigolo A della base del segmento di paraboloido.

Lo schema grafico per la definizione della relazione esistente tra gli assi H_s e H_{wsp} relativa alla Proposizione II-6 è riportata nella

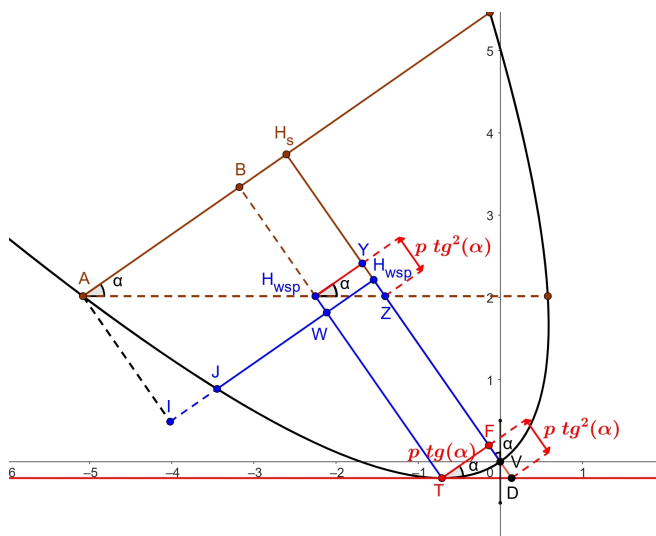


Fig.10 - Schema grafico per la definizione della relazione tra H_s e H_{wsp} nella Proposizione II-6.

figura 10.

La relazione algebrica che lega tra di loro gli assi H_s e H_{wsp} risulta:

$$\sqrt{2pH_s} - \sqrt{2pH_{wsp}} = ptg(\alpha) \quad (21)$$

L'equazione rappresentativa della Proposizione II-6 si deriva combinando la (22) e la (14) ed esprimendo la differenza d :

$$d = H_{wsp} - H_w \quad (22)$$

ottenendo:

$$\frac{d}{p} = \frac{5}{4}tg^2(\alpha) - \sqrt{2\frac{H_s}{p}tg(\alpha)} + \frac{3}{2} \quad (23)$$

La condizione di equilibrio ($H_{wsp}=H_w$) risulta:

$$5tg^2(\alpha) - 4\sqrt{2\frac{H_s}{p}tg(\alpha)} + 6 = 0 \quad (24)$$

il cui determinante Δ è:

$$\Delta = 4 \frac{H_s}{p} - 15 \quad (25)$$

Lo studio della eq. (24) comporta che quando:

- $\frac{H_s}{p} = \frac{15}{4} \rightarrow \Delta > 0$ esistono 2 soluzioni reali distinte (Proposizione II-10);
- $\frac{H_s}{p} = \frac{15}{4} \rightarrow \Delta = 0$ esistono 2 soluzioni reali coincidenti che rappresentano la configurazione di equilibrio vincolata nello spigolo della base (Proposizione II-6);
- $\frac{H_s}{p} < \frac{15}{4} \rightarrow \Delta < 0$ non esistendo soluzioni reali, tutte le configurazioni di equilibrio risultano interne al segmento di paraboloide (Proposizione II-8).

Il valore $15/4p$ ha una semplice interpretazione geometrica esso rappresenta l'altezza della sezione solida il cui baricentro G_s è ottenuto sommando il parametro p alla altezza idrica H_w definita dalla Proposizione II-2.

3.6 Ulteriore analisi della Proposizione II-10

Archimede affronta nella Proposizione II-10 due ulteriori questioni: la definizione del significato fisico delle soluzioni di equilibrio della (24) quando $\Delta > 0$ e l'espressione dei rapporti geometrici presenti nella Proposizioni del Secondo Libro in termini di rapporti di densità tra corpo galleggiante e liquido.

Per quanto riguarda il significato fisico della (24) nella figura 11 sono riportati gli andamenti delle funzioni H_w (eq. 14), H_{wsp} (eq. 22) e d (eq. 22) relativi ai campi della Proposizione II-8 ($H_s > 15/4p$ figura 11a) e della Proposizione II-10 ($H_s < 15/4p$ figura 11b).

H_s , H_{wsp} , H_w e d per le Proposizioni II-6 e II-10

La figura 11a mostra che, quando $H_s > 15/4p$, la funzione H_w e la funzione H_{wsp} si incrociano in 2 punti indicando che esistono 2 superfici di equilibrio che passano per lo spigolo della base del segmento di paraboloide (Proposizione II-10).

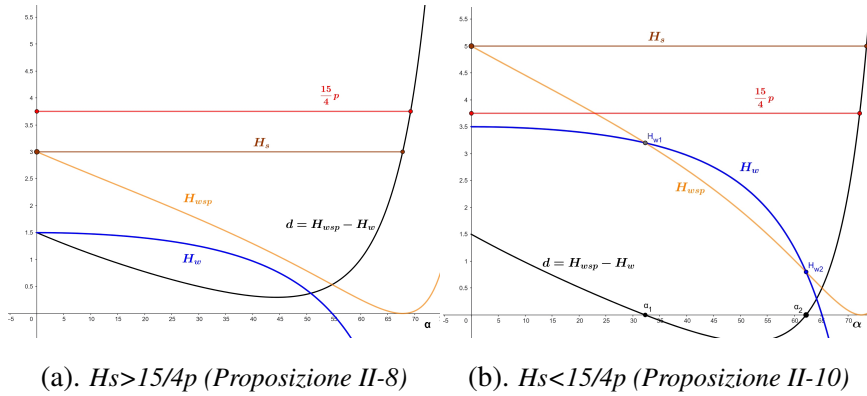


Fig.11 - Rappresentazione delle funzioni H_s , H_{wsp} , H_w e d per le Proposizioni II-6 e II-10

La condizione $H_s = 15/4p$ corrisponde al caso per il quale la funzione H_w interseca la funzione H_{wsp} in un singolo punto, indicando che la sola condizione di equilibrio H_w passa per lo spigolo della base del segmento di paraboloide (Proposizione II-6).

La figura 11b mostra che, quando $H_s < 15/4p$, la funzione H_w risulta costantemente al di sotto della funzione H_{wsp} indicando che, non essendoci intersezioni tra le 2 curve, le superfici di equilibrio H_w sono sempre contenute all'interno del segmento di paraboloide (Proposizione II-8).

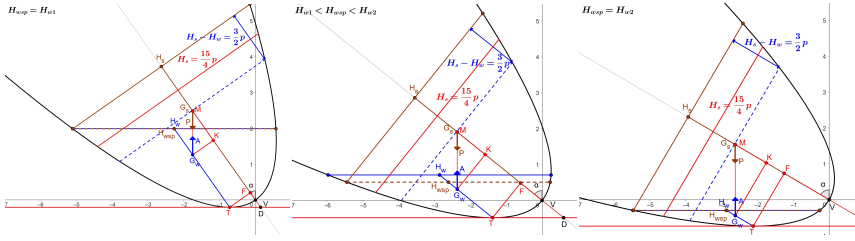
Le soluzioni della (24) nel caso $H_s > 15/4p$ rappresentano gli angoli di equilibrio α_{eq} :

$$\alpha_{eq} = \arctg 2 \left(\sqrt{2 \frac{H_w}{p}} \pm \sqrt{2 \frac{H_w}{p} - \frac{3}{2}} \right) \quad (26)$$

Gli schemi grafici relativi alle condizioni di equilibrio relative alla Proposizione II-10 sono riportati nella figura 12.

L'osservazione della figura 12 comporta che quando:

- le superfici di equilibrio associate ad angoli esterni alle due radici α_1 e α_2 della eq. (26), essendo $d > 0$ ($H_{wsp} > H_w$), non intersecano la base del segmento e sono quindi interne al paraboloide;


 (a). Passante per
lo spigolo $\alpha=\alpha_1$

 (b). Intersecante
la base $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$

 (c). Passante per
lo spigolo $\alpha=\alpha_2$

Fig.12 - Schemi grafici relativi alle superficie di equilibrio analizzate nella Proposizione II-10

- le superfici liquide di equilibrio associate ad angoli coincidenti con le due radici a_1 e a_2 , essendo $d = 0$ ($H_{wsp} = H_w$), passano per lo spigolo della base;
- le superfici liquide associate agli angoli α interni alle radici, essendo $d < 0$ ($H_{wsp} < H_w$), intersecano la base del segmento.

Archimede, in conclusione della Proposizione II-10, rielabora i risultati di tutte le Proposizioni pari in termini di densità relativa tra la densità ρ_s del corpo galleggiante e la densità ρ_w del liquido.

A tal fine Archimede fa riferimento alla Proposizione II-1 del Secondo Libro che espressa in termini moderni risulta:

$$\frac{\rho_s}{\rho_w} = \frac{H_w^2}{H_s^2} \quad (27)$$

Il caso della Proposizione II-2 ($H_s < 3/2 p$) risulta banale in quanto, essendo soddisfatta anche nel caso di corpo non immerso, ne consegue che essa è valida per qualsiasi valore della densità ρ_s del corpo galleggiante.

Nel caso della Proposizione II-4 applicando la (27) nella (19), si ottiene:

$$\frac{\rho_s}{\rho_w} < \left(1 - \frac{3}{2} \frac{p}{H_s}\right)^2 \quad (28)$$

Ne consegue che per garantire una condizione di equilibrio incondizionatamente stabile all'aumentare delle dimensioni H_s del corpo galleggiante deve aumentare la densità ρ_s del corpo stesso.

Il caso della Proposizione II-10 richiede una ulteriore elaborazione.

La figura 11a, rappresentativa del caso $H_s/p > 15/4$, evidenzia che alle due radici α_1 e α_2 della eq. (24) corrispondono i due valori H_{w1} e H_{w2} .

Per determinare le altezze liquide H_{w1} e H_{w2} , esprimendo la condizione di vincolo nello spigolo (eq. 21) in funzione di $tg(\alpha)$ e sostituendola nella condizione di equilibrio del segmento di paraboloide (eq. 14) si ottiene:

$$5H_w - 6\sqrt{H_s}\sqrt{H_w} + H_s + 3p = 0 \quad (29)$$

Assumendo H_s come parametro e H_w come incognita e ponendo $z = \sqrt{H_w}$ risulta:

$$z^2 - 6\sqrt{H_s}z + H_s + 3p = 0 \quad (30)$$

Le cui 2 soluzioni reali risultano:

$$\sqrt{H_w} = \frac{3\sqrt{H_s} \pm \sqrt{4H_s - 15p}}{5} \quad (31)$$

Applicando la eq. (27) nella eq. (31) si ottiene:

$$\frac{\rho_s}{\rho_w} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{4 - 15\frac{p}{H_s}}}{5} \right)^4 \quad (32)$$

Il caso della Proposizione II-6 risulta come un caso particolare della (32) quando il determinante $\Delta=0$:

$$\frac{\rho_s}{\rho_w} = 0.1296 \quad (32')$$

4 Conclusioni

I risultati riportati nel *Trattato sui corpi galleggianti* di Archimede, illustrati nel presente articolo, non appaiono di immediata applicazione pratica in quanto la figura geometrica utilizzata da Archimede appare lontana dalle forme che sono normalmente utilizzate per la costruzione degli scafi dei natanti reali.

Purtuttavia essi presentano una notevole utilità metodologica sia per quanto riguarda la identificazione delle possibili configurazioni di equilibrio sia per quanto riguarda l'estensione dello studio ad altre forme geometriche.

La distinzione tra configurazioni di equilibrio incondizionatamente stabili verticali (Proposizioni II-2 e II-4) e quelle per le quali la stabilità è raggiunta a seguito della inclinazione del corpo galleggiante (Proposizione II-8) è senza dubbio una importante classificazione tecnica.

In tal senso la Proposizione II-6 indica che, fintanto che la dimensione del corpo galleggiante non supera un prefissato valore critico, le configurazioni di equilibrio inclinate sono tali che il bordo libero del natante rimane al di sopra della superficie del.

Dal punto di vista metodologico il riferimento ai baricentri come punti di applicazione del peso e della spinta di Archimede è fondamentale per l'estensione del metodo al caso di corpi galleggianti aventi densità non omogenea.

Dal punto di vista delle possibili applicazioni pratiche è anche molto significativa la consapevolezza mostrata da Archimede nella Proposizione 10 dove chiarisce che i rapporti geometrici presenti nelle diverse Proposizioni dipendono da corrispondenti rapporti tra le densità del solido e quella del liquido.

In tal senso la (29) appare, forse, come la più rilevante in quanto fornisce una chiara indicazione che al fine di garantire una condizione di equilibrio incondizionatamente stabile l'aumento delle dimensioni del natante deve essere accompagnato da un corrispondente aumento della sua densità.

La possibile applicazione operativa del metodo proposto da Archimede nel *Trattato* richiederebbe l'estensione dello studio a forme

geometriche maggiormente rappresentative delle effettive forme che caratterizzano lo scafo di un natante.

Nell'ambito dei solidi tridimensionali si può pensare, ad esempio, a segmenti di paraboloidi di rotazione non retti o a segmenti di sferoide.

Mentre, a partire da curve bidimensionali come segmenti di parabole o di ellisse, si può pensare a solidi di forma cilindrica per le quali le curve bidimensionali siano le generatrici.

Ovviamente tali operazioni richiederebbero la rivalutazione dei particolari coefficienti numerici riportati da Archimede nelle diverse Proposizioni del Trattato che sono ovviamente specifici della particolare forma tridimensionale studiata da Archimede.

5 Bibliografia

1. Bovolin L. (2025), *Il Teorema di Archimede sui corpi galleggianti*. Periodico di Matematica Anno XXXX – Serie IV – Volume VII (3) Supplemento Dicembre 2025, Accademia di Filosofia delle Scienze Umane
2. Fleck H. (2017) Archimede Sui Corpi Galleggianti, <https://www.heinrichfleck.net/quaderni/corpi20galleggianti.pdf>
3. Rorres C. (2016). *Archimedes' floating bodies on a spherical, Earth*. Earth, Am. J. Phys. 84 (1), January 2016
4. Russo L. (2019), *Archimede: un grande scienziato antico*. Carrocci editore, Firenze.

Edizioni del Trattato sui corpi galleggianti di Archimede:

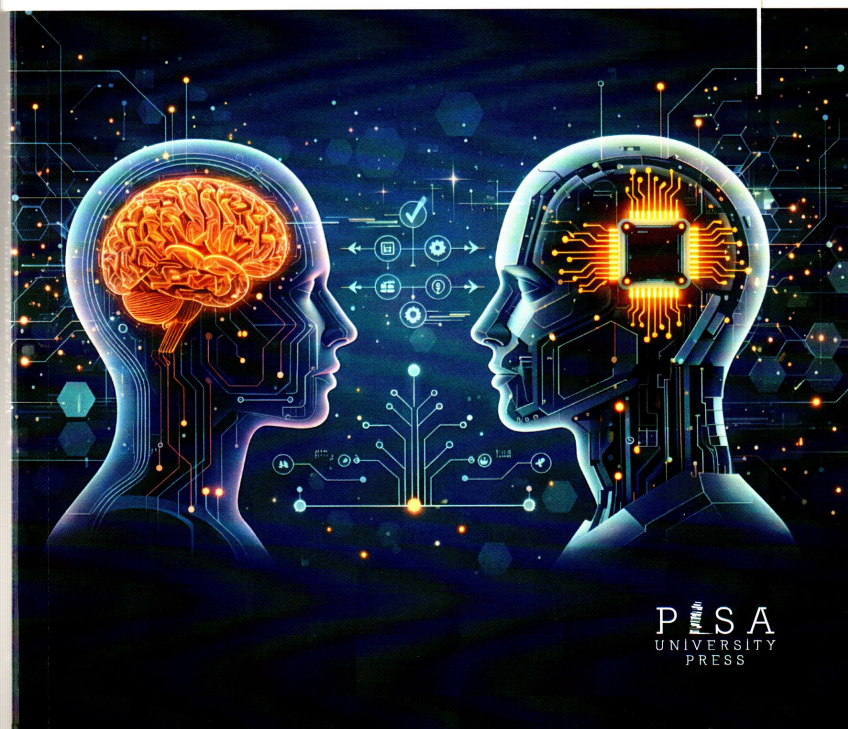
1. Frajese A. (1974). *Archimede: Opere*, UTET, Torino. pp.519-553
2. Heath T. L. (1897). *The work of Archimedes: On floating bodies*, Cambridge University Press: C. & J. Caly and sons London pp. 253-300

Paolo Severino Manca

PRENDERE DECISIONI: UOMINI E MACCHINE

Metodi e modelli a supporto delle decisioni

SAGGI E STUDI



PSA
UNIVERSITY
PRESS