Relazione tra media aritmetica e media quadratica

Pietro Velonà*

DOI:10.53159/PdM(V).v1n2.175

Ricevuto 6-09-2026 Accettato 12-09-2026 Pubblicato 30-09-2026

Abstract: *The present work proposes a demonstration of the relationship between the arithmetic mean and the quadratic mean. By applying the principle of induction, a path is followed that allows the set goal to be achieved. In this way, we want to reflect on the fact that we do not slavishly accept formulas and relationships present in school books, but always try to bring them back to a demonstrative process that enhances their meaning.*

Keywords: Arithmetic mean; quadratic mean

Sommario: *Il presente lavoro propone una dimostrazione della relazione tra la media aritmetica e quella quadratica. Applicando il principio di induzione, si percorre una strada che consente di raggiungere l'obiettivo prefissato. Si vuole, in tal modo, riflettere sul fatto di non accettare pedissequamente formule e relazioni presenti nei libri di scuola, ma cercare sempre di ricondurle ad un processo dimostrativo che ne valorizzi il significato.*

Parole chiave: media aritmetica, media quadratica

*IIS Mazzone, Roccella Jonica, Italia; velomapi@libero.it

1 Introduzione

È vero, è proprio tutta una questione di medie. «Prof, ma se vengo all'interrogazione e non sono sufficientemente preparato, mi rovino la media!». È un grido di difesa da parte degli alunni che, ogni giorno, rimbomba nelle aule. Sentiamo spesso frasi come queste, come sfogo dei nostri studenti. Secondo la loro visione, sembra che tutto debba girare attorno alle medie e che un voto numerico sia più importante di una consapevole preparazione.

L'obiettivo di questo lavoro è di entrare nel mondo di questi temuti indicatori matematici, non per una trattazione sistematica (si veda, ad esempio, Vajani, 1978), ma per creare un'occasione di riflessione che trasmetta l'interesse per la ricerca della conoscenza. Prendendo spunto da un'attività svolta in classe, viene proposta la dimostrazione di una relazione tra due particolari medie: quella aritmetica e quella quadratica.

In una delle lezioni di fisica, che riguarda lo studio della Termodinamica, affronto solitamente la differenza tra l'approccio macroscopico e quello microscopico (Amaldi, 2025). Con quest'ultimo si può, ad esempio, spiegare il significato fisico della temperatura, riconducendolo alla relazione che questa grandezza ha con l'energia media delle particelle di un gas. L'elemento da sottolineare, quando si parla di approccio microscopico, è l'uso della statistica, avendo a che fare con un sistema costituito da molte particelle. Si parte dalla definizione di energia cinetica media, come media aritmetica delle energie cinetiche delle singole particelle, per arrivare alla classica relazione del semiprodotto della massa per il quadrato di una velocità. Quest'ultima è la velocità quadratica media, cioè la radice quadrata della media aritmetica dei quadrati delle velocità. È la prima volta che gli studenti incontrano una media quadratica!

Ho ricordato il mio percorso universitario, quando, nel trattare le medie, ho studiato la media aritmetica, geometrica, armonica e quadratica e, soprattutto, la relazione che esiste tra questi indicatori statistici. Mi sono messo a consultare i miei appunti poiché desideravo andare al cuore del problema e ritrovare la dimostrazione secondo cui la media quadratica è maggiore o uguale della media aritmeti-

ca. Dopo varie consultazioni, ho trovato sempre le solite diciture: si rimanda ad un autore per la dimostrazione, oppure si utilizza la disuguaglianza di Jensen (`https://mate.unipv.it/gilardi/WEBGG/PSPDF/ind-dis.pdf`).

Mi sono trovato come il protagonista del film "Fantozzi va in pensione". Egli, non resistendo a stare troppo lontano dal lavoro, partecipa ad un concorso, sotto una falsa identità. Di fronte ad un problema di alta ragioneria, per la cui risoluzione occorre utilizzare il computer, prova in tutti i modi ad avvicinarsi agli altri candidati per avere un'imbeccata, ma purtroppo non ottiene il gesto di solidarietà desiderato. Ad un certo punto, tira fuori matita e taccuino dalla tasca della giacca e si mette a ragionare, traendo dal cilindro delle sue conoscenze ed esperienze, metodi di calcolo e strategie per poter arrivare al risultato finale. E ci riesce!

Con tanta pazienza, ho preso anch'io carta e penna e ho cercato di organizzare alcune idee che mi conducessero alla dimostrazione della disuguaglianza tra le due medie.

2 Dimostrazione per induzione

Indichiamo con X una grandezza e con x_1, x_2,....x_N i valori assunti da X in N osservazioni. Possiamo affermare che la media aritmetica, $\bar{x}$, dei valori osservati è data da:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N},$$

mentre la media quadratica, $\langle x \rangle$, è espressa dalla seguente relazione:

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}}.$$

Vogliamo dimostrare che la media quadratica è maggiore o uguale della media aritmetica:

$$\langle x \rangle \geq \bar{x}. \tag{1}$$

Distinguiamo due casi.

Caso 1

Supponiamo che tutte le x_i siano uguali ad una valore x. Allora, dalle due definizioni introdotte prima, si ha:

$$\bar{x} = \frac{\cancel{N}x}{\cancel{N}} = x,$$

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\cancel{N}x^2}{\cancel{N}}} = x.$$

Pertanto la (1) è soddisfatta con il segno di uguaglianza.

Caso 2

Supponiamo che le x_i non siano tutte uguali ad uno stesso valore e procediamo per induzione (Bergamini, Barozzi, Trifone, 2025).

Sia $N = 2$. Consideriamo il quadrato della differenza tra le due osservazioni x_1 e x_2; possiamo affermare che esso è strettamente maggiore di zero poiché x_1 e x_2 sono diversi tra loro. Sviluppiamo la disuguaglianza:

$$(x_1 - x_2)^2 > 0,$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 > 0.$$

Sommiamo ad ambo i membri la somma dei quadrati di x_1 e x_2:

$$2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 > x_1^2 + x_2^2,$$

$$2\left(x_1^2 + x_2^2\right) > x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2,$$

$$2\left(x_1^2 + x_2^2\right) > (x_1 + x_2)^2,$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} > \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2,$$

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} > \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Quindi, per $N = 2$, la (1) è soddisfatta con il segno di disuguaglianza. Per l'ipotesi di induzione, supponiamo che sia vera con lo stesso segno per $N - 1$:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2}{N-1}} > \frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_i}{N-1}.$$

Dimostriamola per N. Sviluppiamo il quadrato della media quadratica:

$$\langle x\rangle^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2}{N} + \frac{x_N^2}{N} =$$

$$= \frac{N-1}{N} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2}{N-1} + \frac{x_N^2}{N}.$$

Applichiamo l'ipotesi d'induzione:

$$\langle x\rangle^2 = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2}{N-1} + \frac{x_N^2}{N} > \frac{\cancel{N-1}}{N} \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i\right)^2}{(N-1)^{\cancel{2}}} + \frac{x_N^2}{N} =$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i\right)^2}{(N-1)} + \frac{x_N^2}{N} \longrightarrow$$

$$\langle x\rangle^2 > \frac{N}{N-1} \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i\right)^2}{N^2} + N\frac{x_N^2}{N^2}. \tag{2}$$

Poniamo:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_i}{N},\ B = \frac{x_N}{N}. \tag{3}$$

Sostituendo le (3) nella (2), si ha:

$$\langle x\rangle^2 > \frac{N}{N-1}A^2 + NB^2.$$

Al secondo membro sommiamo e sottraiamo il quadrato della somma di A e B (si riportano tutti i passaggi, affinché il solerte lettore possa confrontare il proprio svolgimento):

$$\langle x\rangle^2 > \frac{N}{N-1}A^2 + NB^2 - (A+B)^2 + (A+B)^2 =$$

$$= \frac{NA^2 + N^2B^2 - NB^2 - (N-1)(A+B)^2}{N-1} + (A+B)^2 =$$

$$= \frac{\cancel{NA^2} + N^2B^2 - NB^2 - \cancel{NA^2} - NB^2 - 2NAB}{N-1} +$$

$$+ \frac{A^2 + B^2 + 2AB}{N-1} + (A+B)^2 =$$

$$= \frac{A^2 + N^2B^2 - 2NB^2 + B^2 - 2NAB + 2AB}{N-1} + (A+B)^2 =$$

$$= \frac{A^2 + (N^2 - 2N + 1)B^2 - 2(N-1)AB}{N-1} + (A+B)^2 =$$

$$= \frac{A^2 + (N-1)^2B^2 - 2(N-1)AB}{N-1} + (A+B)^2 =$$

$$= \frac{(A - (N-1)B)^2}{N-1} + (A+B)^2 .$$

Vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$\langle x \rangle^2 > \frac{(A - (N-1)B)^2}{N-1} + (A+B)^2 \geq (A+B)^2 , \qquad (4)$$

da cui, essendo la quantità $\dfrac{(A - (N-1)B)^2}{N-1}$ maggiore o uguale a zero, si ha:

$$\langle x \rangle^2 > (A+B)^2 . \qquad (5)$$

Tenendo conto delle (3), il secondo membro della (5) è il quadrato della media aritmetica:

$$(A+B)^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_i}{N} + \frac{x_N}{N} \right)^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \right)^2 = \bar{x}^2 .$$

Tornando alla (5), risulta dimostrata la (1) con il segno di disuguaglianza.

Pertanto, per $N \geq 2$, si ha che:

- se tutte le x_i non sono uguali ad uno stesso valore, la (1) risulta soddisfatta con il segno di disuguaglianza;

- se tutte le x_i sono uguali, la (1) risulta soddisfatta con il segno di uguaglianza.

Un'osservazione

Se poniamo l'espressione $(A - (N-1)\,B)$ uguale a zero, si ottiene:

$$A - (N-1)B = 0 \;\longrightarrow\; A + B = NB.$$

Sostituendo le (3), si deduce:

$$\bar{x} = x_N.$$

Possiamo affermare che, se la media aritmetica è uguale ad uno dei valori osservati, allora la seconda disuguaglianza presente nella (4) vale con il segno di uguale.

3 Conclusioni

Nel presente articolo è dimostrata la relazione che intercorre tra la media aritmetica e quella quadratica.

Lo svolgimento di una lezione in classe, riguardante l'approccio microscopico in Termodinamica, diventa lo spunto per sedersi a tavolino e inventare una strategia di calcolo che porti al risultato desiderato.

Il lavoro rappresenta, in tal modo, un'occasione di riflessione sulla necessità di non accettare passivamente equazioni e relazioni presenti nei testi di riferimento, ma chiedersi sempre quali possano essere i processi attraverso i quali esse sono ottenute.

Per finire, un simpatico dubbio: chissà se, dopo la lettura di questo lavoro, la richiesta degli alunni, nella valutazione delle loro prove, sarà di utilizzare la media quadratica, anziché quella aritmetica! (Fig. 1).

Fig. 1 Strane valutazioni.

4 Ringraziamenti

Ringrazio la prof.ssa Carmen Petronio, docente di Matematica e Fisica presso il Liceo Volta di Reggio Calabria, che ha disegnato l'immagine presente nella figura 1, contribuendo con la sua creazione a fornire al lavoro un tocco di simpatica originalità.

5 Bibliografia

1. Amaldi U. (2025). *L'Amaldi.blu. Meccanica e Termodinamica*, volume 1, quarta edizione. Bologna: Zanichelli.

2. Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. (2025). *Matematica.blu 2.0*, volume 5, quarta edizione. Bologna: Zanichelli.

3. Vajani L. (1978). *Statistica descrittiva*. Milano: ETAS.

4. `https://mate.unipv.it/gilardi/WEBGG/PSPDF/ind-dis.pdf` (ultimo accesso: agosto 2026).