

Metamorfosi di una formula

Riflessioni sulla formula di Faulhaber e sui suoi mutamenti

Giorgio Pietrocola*

DOI:10.53159/PdM(V).v1n2.176

Ricevuto 29-09-2026 Accettato 29-09-2026 Pubblicato 30-09-2026



Abstract: *The so-called Faulhaber formula, which solves the classic problem of adding powers of successive integers, is examined, from its origins to its subsequent transformations, from both a historical and educational perspective. Modern formulas using matrices are also presented, including an original teaching proposal based on the author's research.*

Keywords: Faulhaber's formula; Bernoulli numbers; Pascal matrices

Sommario: *Viene esaminata la cosiddetta formula di Faulhaber, che risolve il classico problema della somma di potenze di interi successivi, dalla sua nascita alle sue successive trasformazioni sotto*

*APAV, Teramo; giorgio.pietrocola@gmail.com

il profilo sia storico che didattico. Vengono anche presentate formule moderne che utilizzano le matrici tra cui una proposta didattica originale nata dalle ricerche dell'autore.

Parole chiave: Formula di Faulhaber; Numeri di Bernoulli; Matrici binomiali

1 Introduzione

1.1 Questioni filosofiche

Una formula che muta nel tempo?

Allora il platonismo matematico, quella teoria filosofica che trova ancora molti adepti tra i matematici odierni, quella teoria per cui gli oggetti matematici esistono indipendentemente dagli esseri umani, senza essere soggetti all'ingiuria del tempo, viene confutata? Dunque non è vero che quelle dei matematici siano delle scoperte al pari di quelle di altri scienziati che esplorano il nostro mondo fisico. Vengono confermate invece teorie filosofiche, come il formalismo, secondo cui la matematica è un linguaggio creato dagli esseri umani in cui si inventano simboli, definizioni e regole e poi si esplorano le conseguenze logiche di quelle regole!

No, no, non è questo lo scopo di questo articolo. Credo comunque che le due visioni filosofiche mostrino due facce della stessa medaglia. Nessuna confutazione, una formula non è un oggetto matematico, ma piuttosto un nostro modo per indicare quell'oggetto che è, solo lui, una realtà immutabile. Quindi la formula è una nostra ingegnosa costruzione, un'invenzione che può essere cambiata e migliorata nel tempo per meglio esprimere i concetti retrostanti. Per questo imparare a memoria una formula può funzionare per superare un esame, ma non garantisce una comprensione significativa. Senza un coinvolgimento attivo e consapevole il rischio è di fermarsi al dito indicante senza vedere la luna.

1.2 2025: un anno esemplare

A quale problema si riferisce questa formula? Cosa risolve?

Il problema è quello della corrispondenza tra somme di potenze di numeri interi successivi e particolari polinomi che ne calcolano il risultato. Prendiamo, come esempio, un fatto curioso. L'anno da poco trascorso, il 2025, ha questa doppia particolarità:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = 2025$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2 = 45^2 = 2025$$

La somma dei primi nove interi positivi ognuno elevato al cubo è uguale al quadrato della somma dei primi nove interi successivi. Qui entrano in gioco due particolari somme di potenze di interi successivi composte da 9 addendi. Quella con esponente 3 e quella con esponente 1 (normalmente sottinteso). Per entrambe queste somme, come i matematici sanno sin dall'antichità, esistono polinomi che, in funzione del numero di addendi n , ne calcolano il risultato:

$$\sum_{k=1}^n k^1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

Elementari conoscenze algebriche permettono di riconoscere nel trinomio di quarto grado il quadrato del binomio di secondo. Ponendo $n = 9$ abbiamo

$$\sum_{k=1}^9 k^1 = 45 \quad e \quad \sum_{k=1}^9 k^3 = 2025$$

Un evento simile tra circa mille anni ($\sum_{k=1}^{10} k^3 = 3025$) con 10 addendi. Con otto è già accaduto ai tempi di Dante ($\sum_{k=1}^8 k^3 = 1296$) e con sette ai tempi di Carlo Magno ($\sum_{k=1}^7 k^3 = 784$). Sostituendo n con i numeri interi, iniziando da uno, si ottiene:

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = \frac{1}{4}1^4 + \frac{1}{2}1^3 + \frac{1}{4}1^2 = 1 = (\sum_{k=1}^1 k^1)^2 = (\frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}1)^2 = 1^2$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^2 k^3 &= \frac{1}{4}2^4 + \frac{1}{2}2^3 + \frac{1}{4}2^2 = 9 = (\sum_{k=1}^2 k^1)^2 = (\frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{2}2)^2 = 3^2 \\
\sum_{k=1}^3 k^3 &= \frac{1}{4}3^4 + \frac{1}{2}3^3 + \frac{1}{4}3^2 = 36 = (\sum_{k=1}^3 k^1)^2 = (\frac{1}{2}3^2 + \frac{1}{2}3)^2 = 6^2 \\
\sum_{k=1}^4 k^3 &= \frac{1}{4}4^4 + \frac{1}{2}4^3 + \frac{1}{4}4^2 = 100 = (\sum_{k=1}^4 k^1)^2 = (\frac{1}{2}4^2 + \frac{1}{2}4)^2 = 10^2 \text{ etc.}
\end{aligned}$$

2 La nascita della formula

I matematici sin dall'antichità, come capitò anche a me all'inizio della mia carriera di insegnante, si accorsero di una strana corrispondenza tra somme di potenze di interi successivi, elevati a uno stesso esponente, intero non negativo, e polinomi in una variabile che, coincidendo con il numero di addendi sommati, calcolano proprio il risultato di quella somma. Gli interi successivi 1, 2, 3... sono una particolare progressione aritmetica. Non tratteremo della lunga storia che attraverso i secoli ha visto coinvolti molti matematici, anche illustri come Archimede e Pascal (Beery,2010). La formula di Faulhaber, nonostante il nome, non è stata partorita dalla mente di Jhoan Faulhaber (1580-1635), ma da quella di Jacob Bernoulli (1654-1705). Fu presentata postuma alla comunità dei matematici occidentali (Bernoulli,1713) nel trattato, scritto in latino, "Ars conjectandi" nella pagina mostrata in Figura 1 Per prima cosa dobbiamo tradurla secondo le odierne convenzioni algebriche. Essa diventa così:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k^c &= \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2!}B_2n^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{4!}B_4n^{c-3} + \\
&\quad + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{6!}B_6n^{c-5} + \\
&\quad + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)(c-5)(c-6)}{8!}B_8n^{c-7} + \dots \quad (1)
\end{aligned}$$

Il simbolo $\int$, una esse deformata iniziale di somma, che oggi usiamo per gli integrali, somme di infiniti addendi, è stata sostituita dal più moderno simbolo di sommatoria con indice k , variabile come specificato, atto a descrivere, al suo variare, i vari addendi

... Atque si porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet :

Summae Potestatum

$$f n = \frac{1}{2} n n + \frac{1}{2} n$$

$$f n n = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n n + \frac{1}{6} n$$

$$f n^3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n n$$

$$f n^4 = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n$$

$$f n^5 = \frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{12} n n$$

$$f n^6 = \frac{1}{7} n^7 + \frac{1}{2} n^6 + \frac{1}{2} n^5 - \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{42} n$$

$$f n^7 = \frac{1}{8} n^8 + \frac{1}{2} n^7 + \frac{7}{12} n^6 - \frac{7}{24} n^4 + \frac{1}{12} n n$$

$$f n^8 = \frac{1}{9} n^9 + \frac{1}{2} n^8 + \frac{2}{3} n^7 - \frac{7}{15} n^5 + \frac{2}{9} n^3 - \frac{1}{30} n$$

$$f n^9 = \frac{1}{10} n^{10} + \frac{1}{2} n^9 + \frac{3}{4} n^8 - \frac{7}{10} n^6 + \frac{1}{2} n^4 - \frac{1}{12} n n$$

$$f n^{10} = \frac{1}{11} n^{11} + \frac{1}{2} n^{10} + \frac{5}{6} n^9 - 1 n^7 + 1 n^5 - \frac{1}{2} n^3 + \frac{5}{66} n$$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentuis ensperexit, eundem etiam continuare poterit absque his ratiociniorum ambabimus : Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\begin{aligned} \int n^c &= \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} A n^{c-1} + \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} B n^{c-3} \\ &+ \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} C n^{c-5} \\ &+ \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4 \cdot c - 5 \cdot c - 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} D n^{c-7} \dots \& \text{ ita deinceps,} \end{aligned}$$

exponentem potestatis ipsius n continué minuendo binario, quosque perveniat ad n vel nn. Literae capitales A, B, C, D & c. ordine denotant coëfficientes ultimarum terminorum pro $f n n$, $f n^4$, $f n^6$, $f n^8$, & c. nempe

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}.$$

Fig.1 - Pag.76 di Ars conjectandi di Jacob Bernoulli (consultabile gratuitamente su Internet Archive).

(dunque: $\int n^c = \sum_{k=1}^n k^c$). Sono state aggiunte parentesi per le attuali convenzioni sulla priorità delle operazioni, è stato utilizzato il fattoriale per esprimere in modo sintetico il prodotto degli interi consecutivi e le lettere A, B, C, D sono state sostituite da B_2 , B_4 , B_6 , B_8 come si usa attualmente indicare quegli stessi numeri. Dato che quella sequenza continua all'infinito l'uso degli indici permette di superare il limite finito delle lettere di qualsiasi alfabeto. Questa formula,

indipendentemente dal valore dell'esponente c , indica un numero di addendi potenzialmente infinito che può facilmente essere capito seguendo elementari progressioni aritmetiche di ragione due. Tuttavia il numero effettivo di monomi da prendere in considerazione, crescente al crescere di c , non è indicato esplicitamente, ma è limitato dal fatto che tali monomi dipendono da fattori che diminuiscono progressivamente di una unità. Quando, inevitabilmente, si arriva a zero il prodotto complessivo, indipendentemente dagli altri fattori, è zero e il monomio si annulla. Ciò equivale a prendere in considerazione solo i monomi il cui esponente della variabile n sia strettamente positivo. Quindi, secondo tale regola, gli addendi contenenti potenze con esponenti negativi o nulli semplicemente non devono essere presi in considerazione.

3 Esempi di casi particolari

La forma (1), molto prossima alla versione originale, mantiene l'eccessiva lunghezza compensata, credo, da una maggiore chiarezza divulgativa. Prima di sintetizzarla ulteriormente, la useremo quindi per ricavare alcuni polinomi corrispondenti a particolari valori dell'esponente c .

Caso $c=0$

Bernoulli non prese in considerazione il caso $c = 0$, ma la sua formula, con la convenzione adottata, può funzionare ugualmente. Infatti sostituendo 0 al posto di c e ignorando nella formula gli addendi con esponente non positivo, rimane solo il primo addendo che diventa n . Risultato evidente se si considera, come si fa nei tempi moderni, che tutti gli n addendi con esponente 0 danno 1 per risultato. Quindi:

$$\sum_{k=1}^n k^0 = n$$

Caso c=1

Effettuando la sostituzione $c = 1$ gli addendi con esponente positivo sono solo due. Sottintendendo l'esponente 1 si hanno quindi i numeri triangolari risalenti alla scuola pitagorica:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Caso c=2

Con $c = 2$ l'esponente $c - 1$ è l'ultimo a risultare positivo. Si ha quindi un trinomio di terzo grado:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Caso c=3

Con $c = 3$ ci si ferma ancora al trinomio che però è di quarto grado.

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

Caso c=9

Con $c = 9$ ci si ferma all'esponente $c - 7$ ultimo a essere positivo. Abbiamo dunque un polinomio composto da sei monomi.

$$\sum_{k=1}^n k^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{1}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2$$

Notare che il coefficiente del monomio di secondo grado differisce, forse per un errore di stampa, da quello riportato in Figura 1.

Caso $c=10$

Con $c = 10$ entra in gioco anche il monomio con esponente $c - 9$, implicito nella pagina, che diventa di primo grado coinvolgendo un quinto numero speciale che Bernoulli indicherebbe con E e noi con B_{10} :

$$\sum_{k=1}^n k^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + B_{10}n$$

Perché Bernoulli non lo esplicita insieme agli altri quattro dato che lo utilizza per l'ultimo dei polinomi mostrati?

Possiamo ipotizzare che abbia voluto lasciare al lettore il piacere di scoprirlo. $B_{10} = \frac{5}{66}$ perchè la somma dei coefficienti dei monomi di questi polinomi deve sempre dare 1. Infatti tutte le somme di potenze con un solo addendo danno questo risultato, essendo $1^n = 1$

4 Verifiche e dimostrazioni

Agevole verificare, quanto si vuole, che i polinomi forniti dalla formula calcolano effettivamente le somme di potenze di interi successivi. Non molto più complicato dimostrare per induzione matematica che ogni polinomio fornito dalla formula funziona per qualsiasi numero di addendi. Più complicato dimostrare la formula in generale tanto che Bernoulli non dimostrò la sua formula poi intitolata a Faulhaber, suo riconosciuto ispiratore (Faulhaber, 1631). Si dovette attendere più di un secolo per avere, grazie agli sviluppi dell'analisi matematica e a Carl Jacobi, l'attesa dimostrazione. Dunque la formula funziona perfettamente. Perchè cambiarla?

5 Ulteriori sintesi

5.1 Fattoriale decrescente

Così come abbiamo già usato il fattoriale, per accorciare la nostra formula, possiamo utilizzare il simbolo indicante il fattoriale decrescente. Per esempio porremo

$$c^{\underline{5}} = c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)$$

dove il numero sottolineato posto a esponente indica il numero di fattori decrescenti.

$$\sum_{k=1}^n k^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c^{\underline{1}}}{2!} B_2 n^{c-1} + \frac{c^{\underline{3}}}{4!} B_2 n^{c-3} + \frac{c^{\underline{5}}}{6!} B_2 n^{c-5} + \dots$$

A questo punto si può compattare ulteriormente usando il simbolo di sommatoria riferito a un generico addendo descritto in funzione dell'indice variabile:

$$\sum_{k=1}^n k^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{c}{2} \rfloor} \frac{c^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k} n^{c-2k+1} \quad (2)$$

Queste rappresentazioni che usano il fattoriale decrescente, benché assai fedeli all'originale, non vengono usate comunemente. Inoltre il simbolismo necessario non è ancora ben condiviso dalla comunità dei matematici. Sono invece ben condivisi sia il simbolo di fattoriale che quello di coefficiente binomiale che vedremo come coinvolgere nell'espressione di questa formula.

5.2 Coefficiente binomiale

$$\binom{c}{k} = \frac{c!}{k!(c-k)!}$$

Vedremo ora come, nei secoli, l'utilizzo dei coefficienti binomiali ha trasformato radicalmente l'aspetto della nostra formula. Considerando a titolo di esempio uno dei coefficienti dei monomi descritti da

Bernoulli, abbiamo la seguente identità:

$$\frac{c(c-1)(c-2)}{4!} = \frac{1}{c+1} \frac{(c+1)c!}{4!(c-3)!} = \frac{1}{c+1} \binom{c+1}{4}$$

La formula col fattoriale decrescente diventa così:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^c &= \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{1}{c+1} \binom{c+1}{2} B_2 n^{c-1} + \frac{1}{c+1} \binom{c+1}{4} B_4 n^{c-3} + \\ &+ \frac{1}{c+1} \binom{c+1}{6} B_6 n^{c-5} + \frac{1}{c+1} \binom{c+1}{8} B_8 n^{c-7} + \dots \end{aligned}$$

Compattando con la sommatoria:

$$\sum_{k=1}^n k^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{1}{c+1} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{c}{2} \rfloor} \binom{c+1}{2k} B_{2k} n^{c-2k+1} \quad (3)$$

5.3 Estensione dei numeri di Bernoulli

A questo punto se si vuole migliorare la formula compattandola si deve ampliare la sequenza dei numeri di Bernoulli, a sua insaputa naturalmente.

Indici dispari

La prima naturale estensione è considerare uguali a zero i numeri con indice dispari superiore al due:

$$B_3 = 0, B_5 = 0, B_7 = 0, B_9 = 0, B_{11} = 0, \dots$$

Con questa convenzione si può migliorare la (2) e la (3). Il lettore può provare a scriverle prima di controllare il risultato:

$$\sum_{k=1}^n k^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \sum_{k=2}^c \frac{c^{k-1}}{k!} B_k n^{c-k+1} \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n k^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{1}{c+1} \sum_{k=2}^c \binom{c+1}{k} B_k n^{c-k+1} \quad (5)$$

Inizio della sequenza

Ponendo:

$$B_0 = 1, B_1 = \frac{1}{2}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^c &= \frac{1}{c+1} \binom{c+1}{0} B_0 n^{c+1} + \frac{1}{c+1} \binom{c+1}{1} B_1 n^c + \frac{1}{c+1} \binom{c+1}{2} B_2 n^{c-1} + \\ &+ \frac{1}{c+1} \binom{c+1}{3} B_3 n^{c-2} + \frac{1}{c+1} \binom{c+1}{4} B_4 n^{c-3} + \frac{1}{c+1} \binom{c+1}{5} B_5 n^{c-4} + \dots \end{aligned}$$

o meglio utilizzando la sommatoria:

$$\sum_{k=1}^n k^c = \frac{1}{c+1} \sum_{j=0}^c \binom{c+1}{j} B_j n^{c+1-j} \quad (6)$$

5.4 Un'inutile complicazione

$$\sum_{k=1}^n k^c = \frac{1}{c+1} \sum_{j=0}^c (-1)^j \binom{c+1}{j} B_j n^{c+1-j} \quad (7)$$

Rispetto alla formula precedente (6) questa ha un fattore in più in $c+1$ addendi. Un artificio che ha l'unico scopo di cambiare segno a B_1 , unico numero "bernoulliano" con indice dispari non nullo, perché definito in modo opposto al nostro, cioè $B_1 = -\frac{1}{2}$ invece di $B_1 = \frac{1}{2}$. Questa formula ha dominato per molto tempo, ed è ancora molto diffusa, ma ora finalmente i matematici riconoscono due diverse sequenze per i numeri di Bernoulli (OEIS,2026). Del tutto identiche tranne per il segno di B_1 . Per distinguere le due sequenze si possono indicare con B_j^+ e con B_j^- oppure semplicemente chiarendo, nei vari contesti, a quale delle due ci si riferisca. Se però non

si specifica la scelta, si deve intendere B_j^- , la prima sequenza a essere stata riconosciuta quando con Carl Jacobi (1804-1851) si arrivò, finalmente, alla dimostrazione della formula di Faulhaber (Jacobi, 1834) partendo non da questa ma da una funzione generatrice il cui sviluppo in serie infinita di potenze servì anche per definire i numeri bernoulliani.

$$\frac{x}{e^x - 1} =: \sum_{n=0}^{\infty} B_n^- \frac{x^n}{n!}$$

Ciò non dimostra che ci sia un valido motivo per discriminare la sequenza alternativa dato che:

$$\frac{-x}{e^{-x} - 1} =: \sum_{n=0}^{\infty} B_n^+ \frac{x^n}{n!}$$

Solo un cenno al fatto che le due formule generatrici sono due casi particolari di $\frac{xe^{xt}}{e^x - 1}$, formula generatrice dei polinomi di Bernoulli $B_j(t)$. Infatti $B_j(0) = B_j^-$ e $B_j(1) = B_j^+$ (Luschny, 2013)

5.5 Una variante abbastanza nota

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^c = \frac{1}{c+1} \sum_{j=0}^c \binom{c+1}{j} B_j^- n^{c+1-j} \quad (8)$$

Qui abbiamo ancora la somma di n potenze di interi successivi, ma inizianti da 0. Questa volta la sequenza dei numeri di Bernoulli con $B_1 = -\frac{1}{2}$ calza perfettamente. Questo fatto è facile da spiegare, essendo $0^c = 0$, risulta:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^c = -n^c + \sum_{k=1}^n k^c$$

Dunque inserendo la (5), dopo aver sommato i due monomi simili, si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} - \frac{1}{2} n^c + \frac{1}{c+1} \sum_{k=2}^c \binom{c+1}{k} B_k n^{c-k+1} \quad (9)$$

Proseguendo come già visto si arriva alla (8)

5.6 Una variante poco nota

Dato che risulta:

$$\frac{1}{c+1} \binom{c+1}{j} = \frac{c!}{j!(c+1-j)!} = \frac{1}{c+1-j} \frac{c!}{(j)!(c-j)} = \frac{1}{c+1-j} \binom{c}{j}$$

Sostituendo nella (5) si ha:

$$\sum_{k=1}^n k^c = \sum_{j=0}^c \binom{c}{j} B_j^+ \frac{n^{c+1-j}}{c+1-j} \quad (10)$$

Per quanto visto nel precedente paragrafo abbiamo anche:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^c = \sum_{j=0}^c \binom{c}{j} B_j^- \frac{n^{c+1-j}}{c+1-j} \quad (11)$$

6 Usando matrici

6.1 Rappresentazione matriciale

Per ora abbiamo presentato i monomi dei polinomi ordinati secondo grado decrescente, ma usando le matrici conviene ordinarli per grado crescente. Questo per aiutare il passaggio a un'espressione matriciale sintetica. Per esprimere i primi quattro polinomi per la somma di potenze si scrive:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n k^0 \\ \sum_{k=1}^n k^1 \\ \sum_{k=1}^n k^2 \\ \sum_{k=1}^n k^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \\ \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 \\ \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4 \end{bmatrix}$$

In queste equazioni compaiono vettori con quattro componenti e una matrice quadrata di 4 righe e 4 colonne. Il primo vettore contiene la somma di potenze di n addendi ed esponenti 0, 1, 2, 3. Il secondo vettore contiene le potenze di n con esponenti progressivi

1, 2, 3, 4. La matrice contiene in ogni riga i coefficienti dei polinomi calcolanti le somme iniziando dal primo grado nella prima colonna. Per estrarre i polinomi basta moltiplicare le righe della matrice per la colonna delle potenze di n . Quando moltiplichiamo la prima riga della matrice per la colonna, elemento per elemento, sommando poi i risultati, otteniamo semplicemente n . Quindi:

$$\sum_{k=1}^n k^0 = n$$

Moltiplicando la seconda riga della matrice per la colonna delle potenze otteniamo:

$$\sum_{k=1}^n k^1 = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

Il polinomio genera i numeri triangolari che possono essere calcolati agevolmente con la stessa idea usata per calcolare l'area di un triangolo: calcolare l'area di un rettangolo (o parallelogramma) e poi dimezzare il risultato. Così forse fece il piccolo Carl Gauss che calcolò in un attimo il risultato mentre il suo maestro aveva pensato di tenere impegnata tutta la classe con la somma dei primi cento numeri, per poter svolgere tranquillamente le sue faccende. Moltiplicando la terza riga della matrice per la solita colonna delle potenze si ottiene l'identità già conosciuta e dimostrata da Archimede (287-212 a.C.)(Frajese, 1974):

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Con la quarta riga otteniamo:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$

Un' identità che troviamo nel teorema di Nicomaco di Gerasa (60 circa - 120 circa)

Infine con la quinta riga, sempre moltiplicata per il vettore delle potenze, otteniamo:

$$\sum_{k=1}^n k^4 = -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$

6.2 Una ricerca per gioco

Alla fine degli anni '70, coltivando l'apprendimento per scoperta, all'inizio della mia carriera di insegnante, prima di conoscere la formula di Faulhaber, decisi di indagare autonomamente per cercare di scoprire una legge che permettesse di ricavare, conoscendo i precedenti, i coefficienti del nuovo polinomio. Non conoscevo che pochi polinomi per il calcolo di somme di potenze. Ne trovai altri mediante interpolazione risolvendo sistemi lineari con l'algebra delle matrici, aiutato da una TI-59, una calcolatrice programmabile che precedeva di poco l'era dei computer personali. Man mano che acquisivo nuovi polinomi ebbi l'idea di sintetizzare i dati usando matrice e vettori come visto nel precedente paragrafo. Il mio scopo era di riuscire a prevedere la crescita della matrice dei coefficienti polinomiali anticipando il polinomio successivo non ancora trovato. In questo gioco alcuni coefficienti erano prevedibili facilmente, altri però apparivano del tutto caotici. A malincuore alla fine dovetti arrendermi rinunciando all'impresa che, tuttavia, nel tempo, si sarebbe rivelata molto utile.

6.3 Una scoperta semicasuale!

Passarono più di 15 anni. I computer erano ormai entrati nelle case e nelle scuole. Stavo progettando a casa per i miei studenti una esercitazione di laboratorio su foglio di calcolo per verificare trasformazioni che lasciano invariato il determinante di una matrice. Il caso volle che mi trovai sottomano il quaderno in cui molti anni prima avevo trascritto in forma matriciale i polinomi laboriosamente trovati. Conoscevo la potenza dell'algebra delle matrici e volli provare a invertire quella matrice ricavata con molta fatica che alla fine

mi aveva visto sconfitto. Non sapevo che senso avesse questa inversione e non avevo consapevolezza che servisse a qualcosa, ma, come ispirato, volli provare. Scrissi la matrice di 5 righe per 5 colonne relativa ai primi cinque degli infiniti polinomi calcolanti le somme di potenze di interi successivi, poi chiesi al foglio di calcolo di darmi l'inversa. La risposta richiese un attimo. Il risultato mi lasciò stupefatto! Tutto quel caos che non ero riuscito a capire, come per magia, era scomparso. Anche le frazioni erano tutte scomparse! Rimanevano numeri interi che nonostante i segni alternati e un'incompletezza, riconobbi subito!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

In sostanza si trattava di coefficienti binomiali. A parte l'alternanza dei segni appariva chiaramente il triangolo di Tartaglia benché privato dell'ultimo elemento di ciascuna riga! Improbabile una coincidenza, ma provai subito con una matrice più grande confermando l'inaspettata scoperta. Quella matrice che avevo trovato con tanta fatica poteva essere ottenuta invertendone una facilmente ottenibile dal triangolo di Tartaglia! (Pietrocola, 2026)

6.4 Una diversa formula di Faulhaber?

Il dubbio interrogativo non riguarda la correttezza della formula che ho dimostrato in diversi modi (Pietrocola, 2008, 2017, 2021, 2022, 2023) anche se, per motivi contingenti, molti anni dopo averla scoperta, ma l'attribuzione del nome che posso solo proporre. Ecco la veste con cui, dopo non pochi ripensamenti maturati nel tempo, ho pensato di presentarla:

$$\vec{S}(n) = \overline{A}^{-1} \vec{N}(n) \quad (12)$$

dove, per qualsiasi intero positivo m , $\vec{S}(n)$ e $\vec{N}(n)$ sono vettori con m elementi dipendenti da n e $\overline{A}$ è una matrice di m righe e m colon-

ne. Le componenti mediante gli indici (r, c) variabili da 1 a m sono così definite:

$$[\vec{S}(n)]_r = \sum_{k=1}^n k^{r-1}$$

$$[\vec{N}(n)]_r = n^r$$

$$[\overline{A}]_{r,c} = \begin{cases} 0 & \text{se } c > r \\ \binom{r}{c-1}(-1)^{r+c} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa nuova formula risolve il problema della somma di potenze di interi successivi senza ricorrere ai numeri di Bernoulli, ma utilizzando l'algebra delle matrici. Può fregiarsi del titolo di formula di Faulhaber o merita un nome specifico? Potrebbe anche chiamarsi formula di Edwards dato che, come scoprii molto tempo dopo la mia scoperta, fui preceduto negli anni '80 dal matematico e biologo britannico che dedusse le proprietà di questa matrice partendo da una identità di Blaise Pascal del 1654 usata proprio per risolvere ricorsivamente il problema della somma di potenze di interi successivi (Edwards 1982, 1987) In compenso spero ancora di essere stato il primo a generalizzare questa formula a una qualsiasi progressione aritmetica.

La mia formula generale

La mia formula generale usa la matrice A identica alla $\overline{A}$ tranne per i negativi diventati positivi. Eccola:

$$\vec{S}(n, h, d) = T(h, d)A^{-1}\vec{N}(n) \quad (13)$$

dove h primo elemento della progressione aritmetica e la differenza costante d , detta ragione, sono i parametri che individuano la particolare progressione aritmetica. Ecco anche vettore e matrice della formula non ancora definiti:

$$[\vec{S}(n, h, d)]_r = \sum_{k=0}^{n-1} (h + dk)^{r-1}$$

$$[T(h, d)]_{r,c} = \begin{cases} 0, & \text{se } c > r, \\ \binom{r-1}{c-1} h^{r-c} d^{c-1} & \text{se } c \leq r. \end{cases}$$

Nel caso particolare $h=1$ $d=1$ la formula risolve il problema della somma di potenze di interi successivi e mostra anche che:

$$T(1, 1)A^{-1} = \bar{A}^{-1}$$

da cui

$$\bar{A}T(1, 1) = A$$

Curiose relazioni tra matrici binomiali. Per esempio con matrici del quinto ordine si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

Interessante anche il caso particolare $h = 0$, $d = 1$. Essendo $T(0, 1)$ l'elemento neutro del prodotto matriciale righe per colonna, la (13) diventa:

$$\vec{S}(n, 0, 1) = A^{-1}\vec{N}(n)$$

Ciò ci rivela che invertendo la matrice A si ottengono i coefficienti dei polinomi che calcolano la somma di n addendi, ma partendo da 0 invece che da 1. Tali coefficienti coincidono in tutto con i precedenti tranne per il segno cambiato nei monomi di un grado inferiore rispetto a quello del polinomio. La diagonale sotto la principale invece di avere elementi del valore di $\frac{1}{2}$ hanno valore opposto $-\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Notare che A^{-1} nella prima colonna ha la sequenza B_j^- invece di B_j^+ prima colonna di $\bar{A}^{-1}$.

6.5 Una proposta didattica

La mia impressione è che l'appellativo di formula di Faulhaber possa indicare qualsiasi ricetta per ottenere polinomi calcolanti somme di potenze di interi successivi.

Una ricetta didattica dovrebbe perseguire lo scopo di essere espressa nel modo più chiaro possibile. Con tale intento la mia proposta sfrutta l'esperienza vissuta cercando inutilmente un ordine che potesse spiegare la crescita della matrice dei coefficienti polinomiali al crescere del numero di polinomi consecutivi presi in considerazione. Ora, dopo aver fatto la conoscenza con la formula di Faulhaber, ho capito che la mia era una strada percorribile anche se non facile. Avrei dovuto sostituire quella matrice apparentemente imprevedibile con tre matrici facilmente prevedibili e poi moltiplicare gli elementi corrispondenti (prodotto di Hadamard, simbolo " $\circ$ ") per tornare alla matrice dei coefficienti polinomiali. Ecco la matrice dei coefficienti polinomiali con matrici del quarto ordine, facilmente estendibile ai casi successivi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} B_0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \end{bmatrix}$$

Rimane da chiarire quali siano i numeri di Bernoulli, ma questi si trovano facilmente imponendo che le somme di un solo addendo diano risultato 1 essendo $1^c = 1$. Ciò corrisponde al fatto che nella matrice dei coefficienti polinomiali la somma delle righe è sempre 1.

Il lettore provi a definire in generale questa formula, prima di leggere la soluzione:

$$\vec{S}(n) = (F \circ T \circ B) \vec{N}(n) \quad (14)$$

$$[\vec{S}(n)]_r = \sum_{k=1}^n k^{r-1}$$

$$[\vec{N}(n)]_r = n^r$$

$$[F]_{r,c} = \begin{cases} 0 & \text{se } c > r \\ \frac{1}{c} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$[T]_{r,c} = \begin{cases} 0 & \text{se } c > r \\ \binom{r-1}{c-1} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$[B]_{r,c} = \begin{cases} 0 & \text{se } c > r \\ B_{r-c}^+ & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si noti che questa formula nella sostanza corrisponde alla (10). Se si vuole invece una sostanziale corrispondenza con la (6) si ha la seguente equivalente alternativa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} B_0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1^+ & B_0 & 0 & 0 \\ B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \end{bmatrix}$$

Come si vede cambiano due matrici. Nella prima le unità frazionarie progressive si ripetono, sempre più numerose su ogni riga invece che su ogni colonna. Nella seconda il triangolo di Tartaglia, invece di essere completo, manca del primo elemento di ogni riga.

7 Conclusione

Come il vedere un oggetto da vari punti di vista non confonde l'osservatore, ma lo arricchisce di conoscenze, favorendone la comprensione, così, attraverso le varie espressioni formulate, l'autore spera di essere riuscito ad avviare il lettore verso una comprensione matematica significativa e profonda della realtà immutabile che tutte queste indicano. Ciò pur essendosi limitato nella trattazione ad aspetti storici e didattici, omettendo le varie dimostrazioni, segnalate in bibliografia, indispensabili per godere pienamente della grande bellezza di questo problema dalla lunga storia e dal multiforme aspetto.

8 Bibliografia

1. Attilio Frajese (1974). *Opere di Archimede*, Spirali proposizione 10 p. 335. Torino: UTET
2. Janet Beery (2010). *Sum of powers of positive integers*. Mathematical Association of America (MMA).
3. Johannes Faulhaber (1631). *Accademiae Algebrae*. Internet Archive
4. Jacob Bernoulli (1713). *Summae potestatum In: Artis coniectandi*. Internet Archive. p.97
5. Carl Jacobi (1834) *De usu legitimo formulae summatoriae Maclauriniana*. Journal für die reine und angewandte Mathematik.
6. A.W.F. Edwards. (1982). *Sums of powers of integers*. Mathematical Gazette 66
7. A.W.F. Edwards. (1987). *Pascal's arithmetical triangle. The story of a mathematical idea*,. The Johns University pp.82-84
8. Giorgio Pietrocola (2008). *Eplorando un antico sentiero: teoremi sulle somme di potenze di interi successivi*. Maecla
9. Giorgio Pietrocola (2017). *On polynomials for the calculation of sums of powers of successive integers and Bernoulli numbers deduced from Pascal's arithmetical triangle*. Academia.edu
10. Giorgio Pietrocola (2021). *Matrici binomiali per il calcolo di somme potenze*. Archimede 4,2021
11. Giorgio Pietrocola (2022). *Matrici binomiali per polinomi calcolanti somme di potenze con basi in progressione aritmetica*. MatematicaMente n.298, n.299

12. Giorgio Pietrocola (2023). *From binomial matrices to various theorems on the extension of Faulhaber's formula, on Bernoulli numbers and polynomials*. Academia.edu
13. OEIS (2026). Fondata da Neil Sloane nel 1996. *on-Line Encyclopedia of Integer Sequences*,
 $B_1 = -\frac{1}{2}$: A027642 A027641 , $B_1 = +\frac{1}{2}$: A164555 A027641
14. Giorgio Pietrocola (2026). *Insegnando polinomi e matrici, Attrazione e tardive scoperte sulla scia di un problema classico*, III Convegno "MatEleatica" Intrecci e confronti tra le Scienze Matematiche e le Scienze Umanistiche, Roma: UniverItalia.
15. Peter Luschny (2013) *The Bernoulli Manifesto*