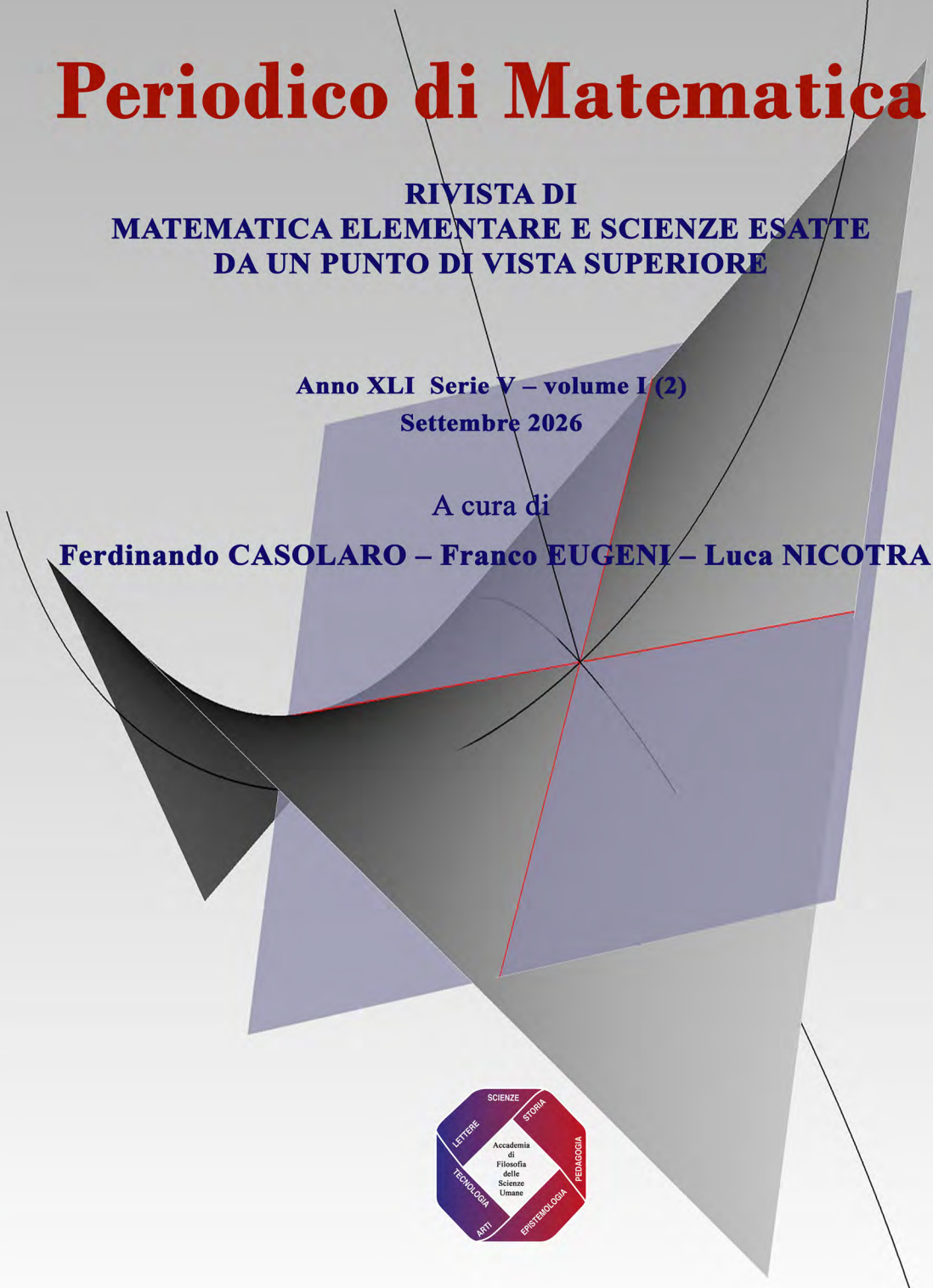
Periodico di Matematica

RIVISTA DI
MATEMATICA ELEMENTARE E SCIENZE ESATTE
DA UN PUNTO DI VISTA SUPERIORE

Anno XLI Serie V – volume I (2)
Settembre 2026

A cura di

Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA



MATEMATICA – FISICA - INFORMATICA

PERIODICO DI MATEMATICA

RIVISTA DI

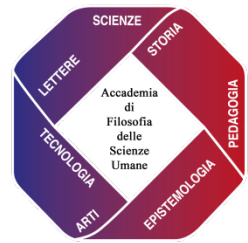
MATEMATICA ELEMENTARE E SCIENZE ESATTE

DA UN PUNTO DI VISTA SUPERIORE

Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro – Franco Eugeni – Luca Nicotra

Anno XLI - Serie V – Volume I (2)
Settembre 2026



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo
Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanna Della Vecchia
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa

Comitato Scientifico
Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Franco Francia (La Spezia)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Paolo Severino Manca (Pisa)
Raffaele Mascella (Teramo)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)
Giovanni Vincenzi (Salerno)

Copertina e progetto grafico
Luca Nicotra

Direzione e redazione
Direttore responsabile:
Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305
eugenif3@gmail.com.
Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693
ferdinando.casolaro@unina.it
Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Segreteria di redazione:
Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Rivista di proprietà di:
Accademia di Filosofia delle Scienze Umane - Zona Industriale Colleranesco – 65021 Giulianova (TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2026 Edizioni AFSU – UniversItalia-Teramo, Roma -

ISSN Online: 2612-6745
® Reg. Versione online n.695/2019 del 19 luglio 2019 e Versione cartacea n.695/2021 del 3 giugno 2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati.

ISBN 978-88-3293-967-5.

Gli scritti apparsi sulla Rivista possono essere pubblicati altrove purché se ne dichiari la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template latex e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista quadrimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:

PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di settembre 2026 presso UniversItalia
Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 –
e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

INDICE

Luca Nicotra, Franco Eugeni, Ferdinando.Casolaro 7
Ricordo del prof. Antonio Maturo

Franco Eugeni 17
Il concetto di potenza nelle sue molteplici accezioni: una analisi epistemologica. Parte Prima

Vittorio Bovolin 47
Analisi trigonometrica del secondo libro di Archimede sui corpi galleggianti

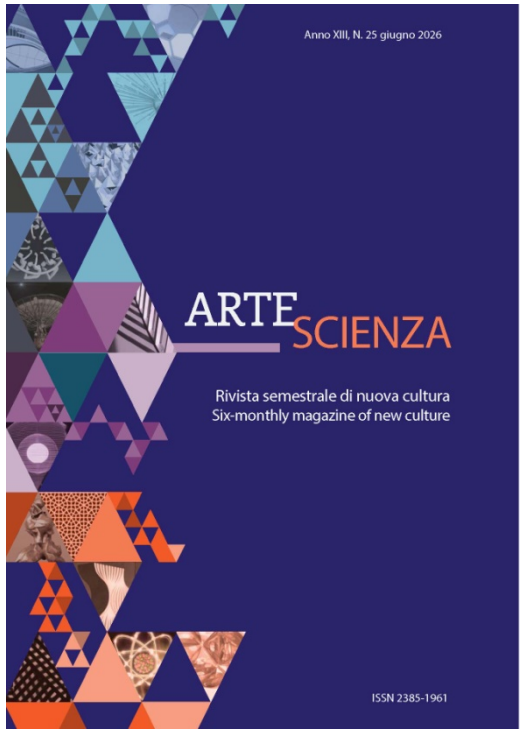
Giuseppe D'Angelo 75
Come costruire una semplice meridiana

Pietro Velonà 101
Relazione tra media aritmetica e media quadratica

Giorgio Pietrocola 109
Metamorfosi di una formula

Franco Gioacchino 131
Una dimostrazione euclidea della proprietà di riflessione dell'ellisse

Profili biografici degli autori 135



https://www.artescienza.online/Rivista%20ArteScienza/ArteScienza%20N25.html

Se la Terra si muove ad altissima velocità e spicchiamo un salto in aria, perché cadiamo perpendicolarmente sullo stesso punto?
di Luca Nicotra

Donne nella Bibbia: silenzio e profezia
di Rossella Passavanti

Fra l'omini e li fiori, pe la Cina
di Renzo Marcuz

28 dicembre 1908: alba tragica. Il terremoto di Messina
di Antonio Castellani

Il taglio del re
di Ferdinando Gargiulo, Ilaria Ciucci

Prove di composizione trasparente 117
di Duilio Carpitella

La luce del Bello
di Violetta Chiarini

Ricordo del prof. Antonio Maturo

Luca Nicotra*
Franco Eugeni†
Ferdinando Casolaro‡

DOI:10.53159/PdM(V).v1n2.171

Ricevuto 26-09-2026 Accettato 27-09-2026 Pubblicato 30-09-2026

Abstract: *On April 4, 2026, Professor Antonio Maturo passed away, a mathematician and scientist who left a void in our community, not only due to his scientific achievements but also because of his high human values. This article briefly highlights his passionate scientific contributions and sketches his personality through personal recollections shared by his close and devoted collaborators.*

Keywords: Antonio Maturo

*Ingegnere meccanico, giornalista pubblicista, Accademico onorario APAV e AFSU, Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", Direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «ArteScienza_magazine», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica»; luca.nicotra1949@gmail.com.

†Già professore ordinario di Discipline Matematiche e di Filosofia della Scienza, Presidente dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane; eugenif3@gmail.com.

‡Presidente ANFSU "R. Caccioppoli" – Direttore di Redazione del «Periodico di Matematica»; ferdinando.casolaro@gmail.com.

Sommario: *Il giorno 4 aprile 2026 è venuto a mancare il prof. Antonio Maturo, matematico e scienziato che ha lasciato un vuoto nella nostra Comunità, non solo per i suoi meriti scientifici ma anche per i suoi alti valori umani. In questo articolo è brevemente ricordato il suo appassionato contributo scientifico e viene tratteggiata la sua personalità attraverso alcuni ricordi personali di suoi stretti e affezionati collaboratori.*

Parole chiave: Antonio Maturo

Fig. 1 - Prof. Antonio Maturo.

Luca Nicotra

La carriera universitaria

Antonio Maturo è nato il 1° maggio 1945.

Si è laureato in Matematica presso l'Università degli Studi dell'Aquila. Successivamente ha conseguito una specializzazione in Ricerca Operativa con lode, orientando progressivamente i propri interessi verso la matematica applicata, la teoria delle decisioni, la probabilità e lo studio matematico dell'incertezza.

La sua attività universitaria è iniziata immediatamente dopo la laurea. Nell'anno accademico 1970-1971 cominciò a collaborare

con la neonata Facoltà di Architettura di Pescara dell'Università degli Studi "G. d'Annunzio", in qualità di Laureato Addetto alle Esercitazioni, nell'ambito del corso di Analisi Matematica e Geometria Analitica I affidato ad Angelo Fadini. Maturo ha successivamente ricordato quella esperienza come un momento importante della propria formazione scientifica e didattica, soprattutto per l'influenza esercitata da Fadini nello sviluppo di una concezione della matematica non limitata al calcolo, ma estesa alla modellizzazione dell'incertezza e alle applicazioni interdisciplinari.

Antonio Maturo ha svolto sostanzialmente l'intera carriera accademica presso l'Università degli Studi "G. d'Annunzio" di Chieti-Pescara.

Dal 1974 è stato in ruolo presso l'Ateneo dapprima come Assistente Ordinario. Nel 1985 è divenuto Professore Associato e nel 2006 Professore Ordinario, inizialmente con lo status di professore straordinario, in *Metodi matematici dell'economia e delle scienze attuariali e finanziarie*.

Per molti anni ha svolto la propria attività presso il Dipartimento di Scienze e Storia dell'Architettura della Facoltà di Architettura di Pescara, dove ha insegnato discipline matematiche e, in particolare, *Analisi matematica*, mantenendo un forte rapporto scientifico con i problemi della progettazione, dell'urbanistica e della valutazione multicriteriale.

Successivamente si è trasferito nell'area delle Scienze Sociali, nella sede di Chieti, assumendo la cattedra di *Metodi matematici dell'economia e delle scienze attuariali e finanziarie*. Presso la Facoltà e il Dipartimento di Scienze Sociali ha sviluppato un programma di ricerca fortemente interdisciplinare, dedicato all'impiego di strumenti matematici, probabilistici e fuzzy per lo studio dei fenomeni sociali, economici e decisionali.

È stato Direttore del Dipartimento di Scienze Sociali dal 1° novembre 2007 al 31 ottobre 2010.

È stato inoltre per molti anni responsabile dei rapporti internazionali. In particolare ha ricoperto la carica di Delegato di Facoltà per le relazioni internazionali dal 2003 e di Coordinatore di numerosi programmi Socrates Erasmus con università di Romania, Grecia,

Austria, Spagna, Svezia e altri Paesi, per una durata complessiva di circa venti anni nell'ambito della Facoltà e del Dipartimento.

È stato collocato a riposo come professore di prima fascia il 1° novembre 2015. Dopo il pensionamento ha continuato l'attività didattica universitaria, con incarichi a contratto presso il Dipartimento di Architettura dell'Università "G. d'Annunzio", tornando quindi nell'ambiente accademico nel quale aveva iniziato la propria carriera e occupandosi nuovamente dell'insegnamento dell'Analisi matematica. Nell 2017 e del 2018 lo ritroviamo ancora come docente di Matematica presso il Dipartimento di Architettura.

La produzione scientifica

La produzione scientifica di Antonio Maturo comprende circa 170 pubblicazioni, tra articoli su riviste, contributi in volume, atti di convegno, monografie e testi a carattere didattico. La sua attività scientifica si è sviluppata lungo più linee di ricerca:

- probabilità soggettiva e teoria della coerenza;
- logica fuzzy, fuzzy sets e fuzzy numbers;
- teoria delle decisioni e decisioni di gruppo;
- geometrie finite e blocking sets;
- giochi cooperativi e geometrie finite;
- iperstrutture algebriche e geometrie join;
- applicazioni all'architettura e all'urbanistica;
- applicazioni alle scienze sociali;
- didattica della matematica.

Attività editoriale

Antonio Maturo ha svolto per diversi decenni un'intensa attività nell'editoria scientifica. È stato uno dei protagonisti della nascita e dello sviluppo di «Ratio Mathematica». La rivista nacque nell'ambiente dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati alla fine degli anni Ottanta e pubblicò il primo numero nel 1990. Nel 2014 ne divenne Editor in Chief, incarico mantenuto fino al 2017. È stato Chief Editor di «Science & Philosophy», rivista di epistemologia, scienza e filosofia avviata nel 2013, condividendone per un periodo la direzione con Franco Eugeni. Con Ezio Sciarra è stato Editor di «Ratio Sociologica», «Journal of Social Sciences: Theory and Applications», pubblicata nell'ambito dell'Università "G. d'Annunzio".È stato inoltre Editor del «Journal of Social Housing», rivista di scienze sociali collegata all'Ateneo di Chieti-Pescara. Maturo è stato Managing Director del «Periodico di Matematiche» e negli anni più recenti ha continuato a collaborare al «Periodico di Matematica» (fondato da Davide Besso nel 1886, con cessazione della pubblicazione nel 1919) riportato in vita nel 2018 con la serie IV da Ferdinando Casolaro, Franco Eugeni e Luca Nicotra. Maturo è stato anche uno dei Direttori editoriali di «Mondo Matematico e Dintorni», rivista dedicata ai docenti del primo ciclo d'istruzione.

Organizzazione di convegni e attività scientifiche

È stato Presidente della Sezione Mathesis di Pescara dal 1987 al 2019. Dal 1999 ha ricoperto l'incarico di Segretario nazionale della Mathesis. Nel 2019 è divenuto Presidente di Mathesis Abruzzo. Antonio Maturo ha organizzato e coordinato numerosi congressi e incontri nazionali e internazionali. Tra le iniziative di maggiore rilievo figura Combinatorics '94, organizzato a Montesilvano insieme a Franco Eugeni e Alessandro Bichara. Il congresso raccolse circa 200 partecipanti appartenenti a 30 diverse nazionalità e si inserì nella serie internazionale dei congressi di combinatoria. Negli anni Novanta del secolo scorso partecipò inoltre all'organizzazione degli incontri sulle iperstrutture algebriche e le loro applicazioni, contribuendo alla nascita di una linea di ricerca diretta ad applicare ipergruppi, fuzzy

sets e strutture multivalore a problemi di architettura, urbanistica, probabilità e successivamente scienze sociali. Negli anni successivi, ha organizzato o partecipato all'organizzazione di iniziative scientifiche internazionali in sedi quali Iași, Reșița, Brno e Siviglia, oltre a numerosi convegni italiani.

Franco Eugeni

Nel 1969 mi trasferii dall'Università di Modena, ove ero Assistente di ruolo e Professore incaricato, all'Università dell'Aquila, ove mi fu assegnato il corso di Geometria I presso Ingegneria e quello di Matematiche Complementari I a Matematica.L'anno successivo, all'inizio del'anno accademico 1970-71, mi venne a trovare il neo dottore Antonio Maturo, laureatosi a Napoli, forse l'anno precedente. Era interessato a collaborare e l'occasione fece si che di colpo si creò tra noi una grande intesa e l'inizio di una magnifica amicizia, durata la vita. Si prese molta cura delle esercitazioni per gli studenti d'Ingegneria, ma mi disse che era anche interessato a collaborare a Matematica. Alle Matematiche complementari avevo due collaboratori. Allora andammo dal prof. Luigi Santoboni, che era il titolare di Matematiche complementari II, e Antonio iniziò a collaborare anche con Luigi. In quel periodo eravamo fortemente interessati alla scuola di Bourbaki, a studiare e scrivere, anzi riscrivere varie Teorie. Io scrissi delle Dispense sulla genesi dei numeri per il Corso di Matematiche complementari e Antonio cominciò a scrivere le sue dispense di Analisi Matematica. Gli argomenti li trattava in modo estremamente completo e pieno di particolari. Le dimostrazioni le andavamo a sviscerare con dovizia di particolari. Le dispense furono molto utili ad Antonio, perché non molto tempo dopo ebbe l'incarico di Analisi Matematica e Geometria Analitica alla facoltà di Architettura di Pescara, corso nel quale divenne Professore Associato nei primi anni '80, al tempo dei giudizi di idoneità.

Nel frattempo, da metà degli anno '70, avevamo fatto amicizia con Bruno Rizzi edavevamo iniziato a collaborare con la "Mathesis nazionale", allora presieduta dal prof. Bruno de Finetti, l'inventore della Probabilità soggettiva. In quel periodo facemmo nascere le

sezioni Mathesis in Abruzzo. Antonio creò le sezioni di Pescara e Chieti, da lui dirette con passione e spirito di apertura verso la formazione di studenti e anche dei loro professori, Mauro Cerasoli fece nascere la sezione di L'Aquila ed io, alternandomi negli anni con il Prof. Italo d'Ignazio, Preside del Liceo Scientifico, feci nascere la sezione di Teramo.

Antonio si innamorò del settore promosso da de Finetti e per lunghi anni si è occupato di probabilità soggettiva. Certamente aveva imparato molto bene a divulgare quella idea. Devo confessare che se ho capito l'idea definettiana della probabilità soggettiva, è grazie alle spiegazioni di Antonio.

Antonio per la ricerca collaborò molto con me, con Bruno Rizzi, con Mauro Cerasoli e devo dire che come gruppo abbiamo avuto le nostre soddisfazioni. Ma Antonio non lavorò solo con noi. La sua idea era di far crescere molte giovani menti, che fossero o no legate alla matematica. Aveva creato uno stuolo di collaborazioni scrivendo sul territorio, sul sociale, sulla matematica divulgativa, ricordo perfino un lavoro sulle "figurine" mezzo di elevazione culturale anche per i bambini.

Pensate che Antonio ha fondato uno dei giornali del nostro attuale gruppo dal titolo «Mondo matematico e dintorni» dedicato ai colleghi della Scuola elementare.

Sulla metà degli anni '80 sia io che Rizzi vincemmo le cattedre di prima fascia. Antonio si fece in quattro per farmi andare ad Architettura dove era lui, ed io preferii l'ambiente pescarese a quello aquilano. Quel periodo lavoravo con Luigia Berardi e Stefano Innamorati. Antonio ci diede un grande aiuto. Insieme a Stefano, Antonio scrisse un lavoro sulla teoria dei Blocking sets, che fu una pietra miliare. Qualunque argomento di matematica, economia, probabilità, statistica, sociale, a lui interessava. Credo che se dovessimo enumerare i lavori che Antonio ha scritto saremmo sui 300.

Fondammo assieme «Ratio Mathematica», «Science & Philosophy», riviste che oggi, grazie a suo figlio Fabrizio che le dirige, sono classificate AMPUR, cioè idonee per partecipare ai concorsi a cattedra universitaria di prima e seconda fascia. Alla fine degli anni '80, avevamo rifondato l'Accademia Piceno-Aprutina dei Velati (APAV)

alla cui guida siamo stati oltre me e Antonio, anche la buonanima di Giuseppe Manuppella, Renata Santarossa , Ferdinando Casolaro e Mario Mandrone.

Negli anni 2000, Antonio passò a insegnare Matematica per le Scienze Sociali, presso la Facoltà di Sociologia di Chieti, dove finalmente, a seguito di vincita di concorso, ebbe la cattedra da Professore Ordinario. Nasce anche l'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane, che nel 2018 inizia a pubblicare un «Bollettino» diretto da Antonio Maturo, da me e da Luca Nicotra, con indirizzi storico filosofici. Non vado nei dettagli dell'enorme opera che Antonio con i suoi collaboratori ha portato aventi negli anni. Questo è soltanto un breve ricordo.

Antonio, mio amico caro, non sei più con noi, ma ci manchi, ci manchi tanto! Noi siamo energia, quando il corpo cede, sappiamo che l'energia rimane, va da qualche parte, forse dove vanno tutte le energie che abbandonano i nostri corpi. Se così è, io lo credo fortemente, ci ritroveremo, in altra forma, in altro modo, in un mondo diverso. Allora non addio ma a vederci quando sarà il momento.

Ferdinando Casolaro

Il giorno 4 aprile 2026, è venuto a mancare il prof. Antonio Maturo, matematico e scienziato che ha lasciato un vuoto nella nostra Comunità, non solo per i suoi meriti scientifici di cui ha fatto partecipe ogni attore di Scuola e Università che ha avuto l'onore e il piacere di essere con lui in contatto, ma anche per i valori umani, il rispetto degli altri e la disponibilità nei confronti di tutti, doti rare tra i docenti universitari.

Ci siamo incontrati che era appena diventato professore associato all'Università di Pescara nel 1985, essendo entrambi partecipi al gruppo di lavoro coordinato dal prof. Bruno Rizzi che due anni dopo diventò Presidente nazionale Mathesis succedendo al prof. Angelo Fadini, di cui era stato vicepresidente.

È nata subito una profonda amicizia, sia per condivisione di valori umani che per convinzioni comuni di carattere professionale verso la didattica e, in particolare, le applicazioni della geometria nell'am-

bito dell'architettura nell'ultimo decennio del secolo scorso, fino ai decenni successivi con l'interesse per le Scienze Sociali, settore di cui nel triennio 2007-2010 è stato Direttore di Dipartimento all'Università di Chieti-Pescara. Non credo di essere presuntuoso se dico che le tematiche relative all'allargamento della matematica alle applicazioni in ambito architettonico ed economico-sociale, nei convegni nazionali della Mathesis degli ultimi decenni, ci hanno visto protagonisti assoluti insieme ai proff.ri Bruno Rizzi e Franco Eugeni che, per esperienza e totalità di conoscenze, erano le nostre guide. Ho citato tre settori di applicazione della matematica a cui ci siamo interessati organizzando convegni, seminari e attività di gruppo attraverso incontri con viaggi reciproci tra Napoli e Pescara, oltre a lunghe chiacchierate telefoniche: Didattica, Interrelazioni Geometria-Architettura e, sotto la guida del prof. Massimo Squillante, Problemi di decisioni nelle Scienze Sociali.

Relativamente alla Didattica, in rappresentanza delle sezioni Mathesis di Napoli e Pescara, già dalla fine degli anni 'Ottanta' siamo stati i più attivi ad organizzare attività specifiche per indirizzi che hanno coinvolto docenti di ogni ordine e grado: dalla Scuola di Infanzia e Primaria fino a studenti e docenti universitari, privilegiando per lo svolgimento le sedi della fascia geografica Abruzzo-Campania, già dal Congresso nazionale del 1994 nella città di Isernia. Non credo sia un caso che anche nelle Manifestazioni in altre regioni, da Iseo 1990 a Verona 1996, agli annuali convegni degli anni 'Ottanta e Novanta' di Catanzaro e Crotone, . . . , almeno l'80dei partecipanti erano delle Scuole e Università di Abruzzo e Campania. Dal 2011 al 2020 abbiamo organizzato Scuole Estive per la formazione degli insegnanti nelle città di Terni (2011), Castellammare di Stabia (2013, 2018), Napoli (Dipartimento di Architettura 2017, 2019), Chieti-Pescara (2016) e - con il contributo dei proff.ri Giuseppe Manuppella, Mario Mandrone, Renata Santarossa - nelle cittadine abruzzesi di Pizzoferrato (2018), Pescasseroli (2019), Roccaraso 2022) di cui sono a disposizione le risultanze pubblicate agli atti su fascicoli Mathesis e fascicoli APAV.

Sulle 'interrelazioni Geometria-Architettura' ci siamo continuamente confrontati, insieme a Franco Eugeni, sull'importanza di di-

vulgare a livello didattico l'ampliamento del Modello euclideo di cui, su incarico del MPI con il Progetto Matematica-Disegno, avevo sviluppato presso il Dipartimento di Architettura 'La Sapienza' di Roma, nel periodo 1989-1998, la parte di Geometria relativa al passaggio dalla 'riga e compasso' alle 'tecniche informatiche'. A tal proposito, ci eravamo ripromessi di riprendere il tema anticipandogli che il suo contributo sulle 'Geometrie finite' sarebbe stato centrale al Convegno di settembre 2026 ad Agerola, cosa che è avvenuta, purtroppo senza il suo contributo. Sui 'Problemi di decisioni' nelle Scienze Sociali, mi sono aggregato a contribuire alla realizzazione dei convegni che Antonio ha organizzato nei primi due decenni del terzo millennio. In particolare - con Franco Eugeni e Massimo Squillante - abbiamo avuto modo di condividere esperienze significative, sia dal punto di vista scientifico che umano, in Atenei stranieri quali Università della Romania (Iasi 2006 e 2012, University Centre of Reșița nel 2016), Università di Bratislava in Slovacchia nel 2013, "University of Defence" di Brno in Repubblica Ceca nel 2015, University of Seville in Spagna nel 2017.

Ma il momento più bello che ci permette di ricordare la Grandezza di un uomo poliedrico nei suoi interessi - in questo caso il ballo di gruppo - è stato il viaggio di ritorno dal Convegno internazionale "Decision Making in Economic and Social Sciences" di Resita a ottobre 2016. Un viaggio massacrante in pullman che durò due giorni con fermate ogni tre ore ai Motel del percorso autostradale, ma unico per le decisioni di Antonio che, nell'ampio spazio all'aperto di ogni Motel, ci posizionava in modo da formare un quadrato e, fornito di attrezzatura con amplificatore, comandava la "Quadriglia" il classico ballo fondato in Francia nella seconda metà del XVIII secolo.

Ad ogni fermata eravamo in 20-25; in pochi minuti diventavamo 80-100 con la partecipazione di tutti i turisti e viaggianti di altri paesi che si aggregavano a ballare. È così che ti ricorderò Antonio, non con tristezza ma con quell'allegria e quel sorriso associati alla profonda amicizia che mi hai regalato.

Periodico di Matematica (V) Anno XLI Vol.I(2) settembre 2026, pp.17-46

Il concetto di potenza nelle sue molteplici accezioni: una analisi epistemologica

Parte Prima

Franco Eugeni*

DOI:10.53159/PdM(V).v1n2.172

Ricevuto 28-04-2026 Accettato 29-09-2026 Pubblicato 30-09-2026

Abstract: *The following work isdevoted to a criticalexamination of the concept of power of a number. Thismayseemextremelysimple, and indeed the first paragraphscontainonlyclarificationsthat are wellknown to many. However, as the discussion progresses, new elementsgradually emerge, especiallywhen one wishes to introduce the concept of an exponent with a negative base and a fractionalexponent—a concept that must be abandonedwhen the exponent of a negative base isirrational. Nevertheless, this concept can be recoveredwhenwe introduce the more general notion of bothexponent and base beingcomplex. In this first work, weshall confine ourselves*

*Già professore ordinario di Discipline Matematiche e di Filosofia della Scienza, Presidente dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane; eugenif3@gmail.com

to the real field. In a subsequent work, the concept of power will be studied in the complex field and in certainreal or complexalgebras, suchas the birealnumbers, dual numbers, bicomplexnumbers, quaternions, and, more generally in matrixs algebra. Throughoutthisentirelyexpository work, severalproofs are presentedwhich, in my opinion, are not easy to find in the literature and are sometimesoverlooked. I haveconsideredit appropriate to highlight thembecausethey are neithertrivialnorlacking in epistemologicalinterest.

Keywords: Power of a number – irrationalnumbers – transcendentalnumbers – power with a negative base and a rationalexponent.

Sommario: *Il seguente lavoro è dedicato ad un esame critico relativo al concetto di potenza di un numero. La cosa può sembrare estremamente semplice ed in realtà nei primi paragrafi appaiono solo delle precisazioni, a molti ben note. Tuttavia andando aventi nelle osservazioni lentamente emergono elementi nuovi, specialmente se si vuole introdurre il concetto di esponente a base negativa ed esponente frazionario, concetto che va abbandonato quando l'esponente di una base negativa è irrazionale. Ma tale concetto potrà essere recuperato quando introdurremo il più generale concetto di esponente e base entrambi complessi. In questo primo lavoro ci limiteremo al campo reale. In un successivo lavoro il concetto di potenza sarà studiato nel campo complesso e in alcune algebre reali o complesse, quali i numeri bireali, i duali, i bicomplessi, i quaternioni e ancora più in generale nelle algebre di matrici. Nel corso del lavoro, del tutto divulgativo, sono presentate alcune dimostrazioni, a mio avviso di non facile reperimento, talvolta trascurate, che ho ritenuto opportuno evidenziare in quanto non banali ed interessanti dal punto di vista epistemologico.*

Parole chiave: Potenza di un numero - numeri irrazionali—numeri trascendenti – potenza a base negativa ed esponente razionale.

1 Il concetto classico di potenza di un numero reale positivo

Ricordiamo al lettore che se a è un numero reale e se $n \geq 2$ è un naturale, si pone $a^n = a \cdot a \cdot a \ldots a \quad (n \geq 2$ fattori eguali ad a, ovvero moltiplicando a per se stesso, $n-1$ volte).

Il numero a si dice la base ed n l'esponente.

Teorema 1.1. *Siano date due potenze di egual base a^n, a^m con $n - m \geq 2$. Si ha allora:*

1. $a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{(n-m)}$, *con* $n - m \geq 2$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a \neq 0 \Rightarrow a^n = a^m \Longleftrightarrow m = n$
5. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
6. $(\dfrac{a}{b})^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
7. $a^n = b^n \Longleftrightarrow a = b$
8. $ab \neq 0 \Rightarrow a > b \Longleftrightarrow a^n > b^n$
9. $a \neq 0 \Rightarrow m > n \Longleftrightarrow a^m > a^n$

Dimostrazione. Banale

Si è ritenuto opportuno eliminare la restrizione del teorema precedente sugli esponenti per i quali è richiesto che sia $n - m \geq 2$. Allo scopo ampliamo la definizione di potenza completandola con le definizioni formali seguenti, la cui necessità capiremo a breve. Porremo nel seguito:

$$a^1 = a,$$

e per $a \neq 0$ poniamo ancora:

$$a^0 = 1 \text{ e } a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

definendo in tal modo per una base a reale qualsiasi la potenza ad esponente unitario e per una base reale non nulla sia la potenza ad esponente zero, che la potenza ad esponente negativo.

Poste queste definizioni, osserviamo:

1. Nel caso sia $m = 1$, il primo membro della (2) ha sempre significato, ma il secondo membro acquista significato solo per via della posizione $a^1 = a$, avendosi di conseguenza:

$$\frac{a^{(m+1)}}{a^m} = a^{(m+1)-m} = a^1 = a$$

2. Nel caso siano $m = 0, a \neq 0$ il primo membro della (2) ha sempre significato, ma il secondo membro acquista significato per la posizione $a^0 = 1$, avendosi di conseguenza:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1 \, .$$

3. Nel caso siano $m < 0, a \neq 0$, si può scrivere, per la definizione di base non nulla ed esponente negativo, e notando che $m - n$ non è negativo:

$$a^{n-m} = a^{-(m-n)} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

Ne segue allora che la (2) vale quali che siano n ed m , si ha:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \tag{1}$$

con n, m qualsiasi.

È immediato convincersi che le relazioni precedenti del teorema valgono per n e m qualsiasi. Si ha allora:

$$a^{-n}a^{-m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{(-n)+(-m)} \tag{2}$$

$$\frac{a^{-n}}{a^{-m}} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{(-n)-(-m)} \tag{3}$$

$$(a^{-m})^{-n} = (\frac{1}{a^m})^{-n} = (a^m)^n = a^{(-m)(-n)} \tag{4}$$

$$a \neq 0 \Rightarrow a^{-n} = a^{-m} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m} \Leftrightarrow a^n = a^m \Leftrightarrow m = n \Leftrightarrow -m = -n.$$

In modo del tutto analogo valgono le altre. □

2 La teoria dei radicali

Premettiamo la nozione di radice aritmetica di un numero reale non negativo $a \geqslant 0$.

Definizione 2.1. *Dati un numero reale $a \geqslant 0$ e un naturale $n \geqslant 2$ si chiama radice aritmetica n-ma di a, quel numero reale $b \geqslant 0$ tale che $b^n = a$. Tale numero b si indica con il simbolo: $\sqrt[n]{a}$.*

Nota 2.1. *Prima del XVI secolo, i matematici indicavano la radice quadrata scrivendo per esteso il termine latino radix o abbreviandolo con una R (spesso tagliata da una linea diagonale, come fece Fibonacci nel 1220). Il simbolo di radice, nell'uso attuale, fu introdotto dal matematico tedesco Christoff Rudolff (1499 –1545) nel 1525.*

Il numero reale a si chiama radicando e il simbolo $\sqrt[n]{a}$ si chiama radicale, mentre n si chiama indice del radicale:

$$\sqrt[indice]{radicando} = radicale$$

La definizione si completa osservando che per definizione è:

$$\sqrt[1]{a} = a \text{ e } \sqrt[n]{a}^n = a$$

Se $a > 0$ nel caso di indice dispari, si definisce[1] un radicale a base negativa e indice dispari ponendo:

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$$

[1]Non viene definita, in campo reale, la potenza di base negativa $-a(a \geqslant 0)$ ed esponente un intero pari $2n(n \geqslant 1)$, poiché l'equazione binomia $x^{2n} = -a$ non ha soluzioni in campo reale.

con la convenzione che non si usa mai nella teoria e calcolo dei radicali una base negativa, così quando si presenta un radicale a base negativa e indice dispari, il segno meno si porta fuori della radice!

La convenzione si giustifica osservando che entrambi i membri della precedente sono la unica soluzione dell'equazione binomia:

$$x^{2n+1} = -a$$

Le principali proprietà nell'ipotesi $a \geqslant 0$ ed essendo gli indici numeri naturali, le cui dimostrazioni sono peraltro reperibili nei testi di scuola secondaria, si lasciano al lettore. Presentiamo le seguenti:[2]

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{(m+n)}} \tag{5}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{m-n}} \tag{6}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \Rightarrow \sqrt[n]{a^{nk}} = a^k \tag{7}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \tag{8}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \tag{9}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}(iper - razionalizzazione) \tag{10}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \tag{11}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \tag{12}$$

[2]Per via delle definizioni date quando si opera sui radicali sia la base che l'indice del radicale sono considerate non negativi.

$$a^k \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{kn} b} \tag{13}$$

La seguente si chiama formula del radicale doppio:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \tag{14}$$

Teorema 2.1. *Il problema è trovare x e y tali che:*

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

ovvero tali che:

$$a \pm \sqrt{b} = x + y \pm 2\sqrt{xy}$$

Dimostrazione. Consideriamo, allo scopo, il sistema delle due equazioni:

$$x + y = a, \quad 4xy = b$$

la cui risolvente è:

$$t^2 - at + \frac{b}{4} = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$x = t_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}, \quad y = t_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2},$$

dalle quali l'asserto. □

Lo studio dei radicali ci conduce, per approfondire in diverse direzioni. Non ci risulta che ci siano generalizzazioni della formula del radicale doppio, tranne forse il caso particolare numerico:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{9}} + \sqrt[3]{\tfrac{2}{9}} + \sqrt[3]{\tfrac{4}{9}}$$

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920) trovò la formula:

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{...}}}} \tag{15}$$

È interessante capire come Ramanujan sia arrivato a concepire questa formula. Riportiamo il suo calcolo:

$$3 = \sqrt{9} = \sqrt{(1 + 2 \cdot 4)} = \sqrt{1 + 2\sqrt{16}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 15}} =$$
$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3 \cdot 5}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3 \cdot \sqrt{25}}} =$$
$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}} = 1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4 \cdot \sqrt{1 + 5 \cdot 7}}} =$$
$$1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4 \cdot \sqrt{1 + 5 \cdot \sqrt{1 + 6 \cdot 8}}}} = ecc.$$

con $\quad 8 = \sqrt{64} = \sqrt{1 + 7 \cdot 9}$

La precedente si generalizza per $n \geqslant 2$ nella:

$$n + 1 = \sqrt{1 + n\sqrt{1 + (n + 1)\sqrt{1 + (n + 2)\sqrt{...}}}} \tag{16}$$

e ancora nella:

$$n + x + a =$$
$$\sqrt{[ax + (n + a)^2] + x\sqrt{[ax + (n + a)^2] + (x + 1)\sqrt{[ax + (n + a)^2] + (x + 2)\sqrt{...}}}}$$

Si ha ancora che:

$$\sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \sqrt{x_3 + \sqrt{a}}}}$$

converge $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n$, esiste ed è finito.

3 Il concetto di potenza con base un numero reale positivo ad esponente razionale

Vogliamo ora estendere il concetto di potenza anche ad esponenti razionali.

Siano n, m due naturali, e sia $a \geqslant 0$, un numero reale, poniamo:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \tag{17}$$

Si noti che le proprietà dei radicali si traducono nelle seguenti proprietà degli esponenti razionali:

$$\frac{m}{n} = \frac{h}{k} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{h}{k}} \tag{18}$$

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{h}{k}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{h}{k}} = a^{\frac{mk+nh}{nk}} \tag{19}$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{h}{k}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{h}{k}} = a^{\frac{mk-nh}{nk}} \tag{20}$$

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} \tag{21}$$

Nota 3.1. *Il concetto di potenza ad esponente frazionario fu teorizzato per la prima volta dal filosofo e matematico francese Nicole Oresme (1325-1382) intorno al 1350, nel suo trattato De proportionibus proportionum. (1499 – 1545). L'idea venne ripresa e perfezionata solo teoricamente da Michel Stiefel (1487-1567) e Simon Stevin (1548-1620),che usarono simboli propri. Tuttavia, il concetto fu ripreso e formalizzato nei suoi aspetti teorici da John Wallis (1616-1703) nel 1656, ma fu Isaac Newton (1643- 1726) nel 1676 ad introdurre ufficialmente la scrittura moderna con la frazione posizionata in alto a destra.*

4 Le anomalie del concetto di potenza con base un numero reale negativo ed esponente razionale

Supponiamo sempre che n, m siano due naturali, e $a \geq 0$ sia un numero reale, definiamo la potenza di un numero reale negativo ed esponente frazionario, ponendo:

$$-a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{-a^m} \tag{22}$$

$$(-\ a)^{-\ \frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{(-\ a)^{\ m}}} \tag{23}$$

simboli che hanno senso in campo reale, escluso il caso in cui sia $m = 2p + 1$ dispari e $n = 2q$ pari . Infatti in tale caso l'eventuale $\sqrt[2h]{(-a)^{2k+1}}$ implicherebbe l'esistenza di una soluzione per l'equazione:

$$x^{2h} = (-a)^{2k+1} = -\ (a)^{2k+1}$$

che come è ben noto non esiste in campo reale.

Alcune formule valide nel caso di base positiva non valgono più nel caso di base negativa.

Tuttavia si presentano diverse anomalie sulle formule derivate. Ad esempio si ha che non sempre coincidono le espressioni quando n ed m sono entrambi pari:

$$\sqrt[n]{(-a)^m} \text{ e } \left(\sqrt[n]{(-a)}\right)^m$$

Infatti:

$\sqrt[2]{(-3)^4} = 9 \quad , \quad \left(\sqrt[2]{-3}\right)^4 = (i\ \sqrt[2]{3})^4 = i^4\ 9 = 9$ (eguali)

$\sqrt[2]{(-\ 3)^6} = 27 \quad , \quad (\sqrt[2]{-3}\ )^6 = (i\sqrt[2]{3}\ )^6 = i^6\ 27 = -\ 27$ (opposti)

$\sqrt[2]{(-2)^3} = 2\ i\ \sqrt[2]{2} \qquad (\sqrt[2]{-2}\ )^3 = 2i^3\sqrt[2]{2} = -\ 2\ i\ \sqrt[2]{2}$

Chiaramente l'essere eguali o no dipende dalla natura delle potenze di *i*. A rigore il passaggio per i numeri complessi in realtà sarebbe interdetto e mentre il primo esiste in ambo i casi il secondo non esiste in ambo i casi. Nel terzo esempio i valori sono immaginari ed opposti.

Se invece n è dispari l'eguaglianza vale sempre quale che sia m pari con risultato nel campo reale. Dunque si ha:

$$n = 2k + 1 \Rightarrow \sqrt[n]{-a^m} = (\sqrt[n]{-a})^m \tag{24}$$

Ad esempio se $m/n = h/k$ risulta:

$$-a^{\frac{m}{n}} = -a^{\frac{h}{k}}$$

solo nel caso che m e h sono entrambi pari, oppure entrambi dispari, pur comunque essendo sempre eguali in modulo, avendosi:

$$\left|(-\ a)^{\frac{m}{n}}\right| = \left|(-\ a)^{\frac{h}{k}}\right|$$

sempre escludendo il caso che m ed n oppure h e k siano dispari con n e k pari.

Valgono, infatti i seguenti controesempi sempre nel campo reale R.

È 6/4 = 3/2 ma risulta: $(-\ 3)^{\frac{6}{4}} = (\ 3)^{\frac{6}{4}} = \sqrt{27} > 0$ mentre $(-\ 3)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{-27}$ che non esiste in R; è 2/2 =1 e risulta $(-2)^{2/2} = (2)^{2/2} = 2$ mentre $(-2)^1 = -2 \neq +2$; è 20/12 = 10/6 =5/3 e risulta: $(-2)^{20/12} = (-2)^{10/6} > 0$ mentre $(-2)^{10/6} \neq (-2)^{5/3} < 0$.

Si osservi ancora le eguaglianze 9/6 = 6/4= 3/2 e risulta:

$(-2)^{9/6}$ no in R , $(-2)^{6/4} = 2^{6/4} = \sqrt{8} > 0$, $(-2)^{3/2} = \sqrt{-8}$ no in R.

Ci si chiede ancora se siano valide le formule:

$$(-\ a)^{\frac{m}{n}} \cdot (-\ a)^{\frac{h}{k}} = (-\ a)^{\frac{m}{n}+\frac{h}{k}} = (-\ a)^{\frac{mk+nh}{nk}}$$
$$(-\ a)^{\frac{m}{n}} : (-\ a)^{\frac{h}{k}} = (-\ a)^{\frac{m}{n}-\frac{h}{k}} = (-\ a)^{\frac{mk-nh}{nk}}$$

Osserviamo che quando si sommano due numeri razionali positivi, il risultato finale si può semplificare dividendo sia il numeratore

che il denominatore per un divisore comune d dei medesimi secondo la relazione:

$$\frac{m}{n}+\frac{h}{k}=\frac{mk+nh}{nk}=\frac{(mk+nh)/d}{nk/d}$$

dove d varia tra 1 e il MCD $(mk+nh\ ;\ nk)$. L'esempio seguente è chiarificatore.

Considero il numero razionale:

$$\frac{42}{60}=\frac{2\ \cdot 3\ \cdot\ 7}{2^2\cdot\ 3\ \cdot\ 5}$$

I divisori comuni d tra numeratore e denominatore sono: 1, 2, 3, 6 = MCD (42;60).

Si ha dividendo per i vari divisori 1 ,2,3,6 , i vari casi:

$(-2)^{\frac{42}{60}}$, $(-2)^{\frac{21}{30}}$, $(-2)^{\frac{14}{20}}$, $(-2)^{\frac{7}{10}}$

dei quali il secondo e il terzo

$(-2)^{\frac{21}{30}}=\sqrt[30]{-\ 2^{21}}$, $(-2)^{\frac{7}{10}}=\sqrt[10]{-\ 2^{7}}$

non esistono in campo reale, mentre esistono il primo e terzo, sono eguali tra loro e valgono:

$(-2)^{\frac{42}{60}}$ = $(2)^{\frac{42}{60}}$ = $(2)^{\frac{14}{20}}$ =$(-2)^{\frac{14}{20}}=\ 2)^{\frac{7}{10}}$ = $\sqrt[10]{128}$

Ancora si ha per la frazione $\frac{10}{14}$ con divisori 1 e 2 = MCD (10,14) l'esistenza di due possibili casi peraltro tra loro discordi:

$(-2)^{\frac{2\bullet}{2\bullet}\frac{5}{7}}$ = $(2)^{\frac{5}{7}}\neq(-2)^{\frac{5}{7}}=-\ (2)^{\frac{5}{7}}$.

Considerazione del tutto analoghe si possono svolgere per la divisione di potenze frazionarie a base positiva.

L'ulteriore relazione sulla quale si possono sviluppare considerazioni sono le formule dell' "includere ed estrarre":

$$b^k\,(-\,a)^{\frac{m}{n}} = (-\,ab)^{\frac{mk}{n}}$$

e ancora le seguenti:

$$(-\,ab)^{\frac{m}{n}} = (-\,a)^{\frac{m}{n}}(b)^{\frac{m}{n}} = (-\,a)^{\frac{m}{n}}(b)^{\frac{m}{n}}$$
$$(ab)^{\frac{m}{n}} = (\,a)^{\frac{m}{n}}(b)^{\frac{m}{n}} = (-\,a)^{\frac{m}{n}}(-b)^{\frac{m}{n}}.$$

Ancora possiamo costruire esempi e contro-esempi per gli esponenti negativi. Lasciamo ai lettori questo "divertente compito".

Concludendo appaiono ben chiare le difficoltà che nascono quando si trattino le potenze a base negativa ed esponente razionale. Esse a volte esistono a volte no, a volte nelle semplificazioni cambia il segno. Le questioni sono molto più difficili di quanto non sembrino a priori e questo è uno dei motivi per cui in prima approssimazione quando si trattano le formule dei radicali, o il che è lo stesso le formule ad esponente razionale, si preferisce supporre la base non negativa. Nel successivo lavoro sulle potenze a base complessa ed esponente complesso tenteremo di rendere uniforme la trattazione delle potenze a base qualsiasi e esponente qualsiasi con la sola eccezione dello 0 elevato a zero che non si definisce e da luogo nella teoria dei limiti ad uno dei casi cosiddetti di indeterminazione.

5 Potenza a base reale ed esponente reale

L'ultimo passo che si fa in campo reale è la definizione di potenza ad esponente reale.

Sia dato un numero reale $a \geqq 0$, e sia x_1, x_2, ..., x_n , ...una successione di numeri razionali positivi tali che: $\lim_{n->\infty} x_n$=x. Segue allora:

Teorema 5.1. . *La successione* a^{x_1}, a^{x_2}, ... a^{x_n}, ... *di numeri positivi, nelle ipotesi indicate sopra, converge ad un limite, limitato superiormente che, per definizione, è positivo e si denota con* a^x*, risulta cioè:*

$$a^x = \lim_{n->\infty} a^{x_n}$$

Teorema 5.2. *.Se a>0, b* ≥ 0*,* $a \neq 1$*, l'equazione in x ,* $a^x = b$ *, ha una e una soluzione in campo reale che si denota con x =* $\log_a b$*.*

Nota 5.1. *b = 0 <=> x= 0,* $a^x = a^y$ *<=> x= y*

1. $a^{\log_a x} = x$ *(identità fondamentale)*
2. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ *(trasformazione di un prodotto in somma, segue: xy =* $a^{\log_a x + \log_a y}$
3. $\log_a x = \log_b x / log_b a$ *(cambiamento di base)*
4. $x^y = a^{y \log_a x}$ *(trasformazione di una potenza in prodotto)*

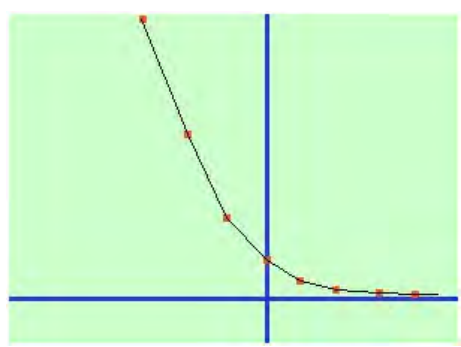


Fig. 1 - $y = a^x$ per $0 < a < 1$

Riportiamo i grafici degli esponenziali e dei logaritmi.

Considero la funzione $y = a^x$

Se $0 < a < 1$ si ha il grafico di figura 1. Se $a > 1$ si ha il grafico di figura 2.

La funzione $y = \log_a x$, definita per $x > 0$, presenta ancora due possibili grafici. Per $0 < a < 1$, la curva ha il grafico di figura 3.

Mentre se $a > 1$, si ha l'andamento di figura 4.

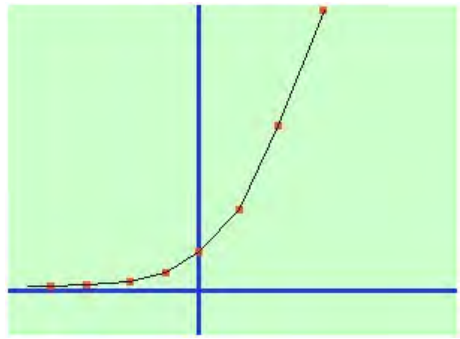


Fig. 2 - $y = a^{\mathrm{x}}$ per $a > 1$

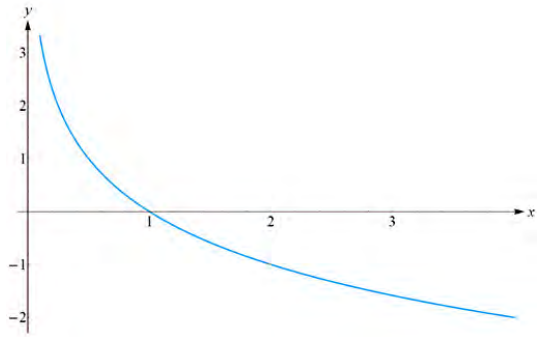


Fig. 3 - $y = \log_a x$, con $0 < a < 1$

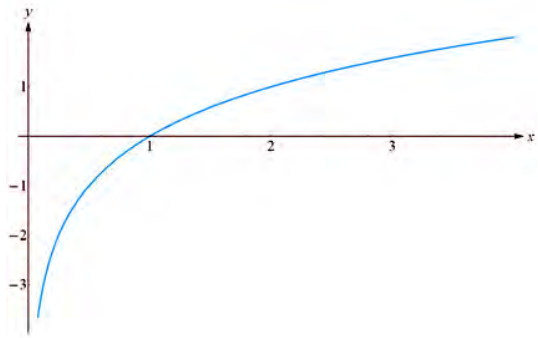


Fig. 4 - $y = \log_a x$, con $a > 1$

6 Il numero e : base dei logaritmi di Nepero

In questo paragrafo approfondiamo la storia e i fondamenti del numero e, una costante matematica che sembra sia stata introdotta da Nepero nel 1618. Taluni infatti lo chiamano numero di Nepero, in quanto il primo riferimento in letteratura risalirebbe al citato anno 1618 ed apparirebbe nella tavola di una appendice di un lavoro sui logaritmi di John Napier (1550-1617). Nella tavola non appare espressamente la costante, bensì un elenco di logaritmi naturali, calcolabili a partire dalla costante. Circola tuttavia la voce che la tavola sia stata scritta da William Oughtred (1574-1660).

Il matematico tedesco e monaco agostiniano Michel Stiefel (1486-1507) fu un incredibile innovatore. Introduce l'idea di una corrispondenza biunivoca tra una progressione geometrica e una aritmetica, che è in sé l'idea del logaritmo.[3]

Nota 6.1. *L'opera più importante di Michael Stifel, è: Arithmetica integra (1544).Ed. Johann Petreiu, Norimberga, che contiene varie ed importanti innovazioni nel simbolismo matematico. Dati due numeri x edy , indica la moltiplicazione con xy, ovvero introduce il simbolo della moltiplicazione per giustapposizione (senza alcun segno tra i termini). Utilizza numeri sia positivi che negativi, che al tempo chiamavano "numeri absurdi" ed erano rifiutati dall'accademia imperante. Stifel li utilizzò come equivalenti agli altri numeri. Così introdusse un unico caso per le equazioni di 2° grado, non dovendo usare numeri solo positivi. È il primo a utilizzare il concetto di "esponente" includendo anche le prime regole per il calcolo delle potenze, quali:*

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

Utilizza anche esponenti negativi e precisa che la costruzione di una loro teoria avrebbe comportato molto lavoro, ma avrebbe prodotto risultati di grande ineresse. Discusse anche attorno alle proprietà

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Stifel.

dei numeri irrazionali, ponendo la questione se questi fossero numeri da considerare esistenti o solo fittizi come voleva l'accademia. Stifel li trovò molto utili per la matematica e non superflui ed escogitò un metodo per calcolare le radici di ordine superiore utilizzando sia i coefficienti binomiali sia le successioni. Il libro contiene una tabella di numeri interi e potenze di 2 che alcuni hanno considerato una versione primitiva di una tavola logaritmica. Stifel sottolinea esplicitamente che le operazioni di moltiplicazione e divisione nella serie geometrica possono essere poste in corrispondenza biunivoca con le operazioni di addizione e sottrazione nella serie aritmetica. Stiefel come Monaco fu un riformatore protestante sostenitore di Martin Lutero (1483-1546), come matematico fu professore all'Università di Jena.

Il concetto di logaritmo naturale fu per la prima volta descritto dal matematico tedesco Nicolaus Mercator (1620-1687) nel suo scritto *Logarithmotechnia*,pubblicato nel 1668, anche se, precedentemente il matematico inglese John Speidell[4] (1600-1634) un collaboratote di Napier, che nel 1619, pubblicò una tabella intitolata "New Logarithmes" nella quale calcolò i logaritmi naturali di seni, tangenti e secanti. Una nuova edizione di "New Logarithmes" fu pubblicata nel 1622 e conteneva un'appendice con i logaritmi naturali di tutti i numeri da 1 a 1000.

È parere di diversi storici, che la costante e sarebbe stata usata, per la prima volta, nel 1683, dal matematico svizzero Jakob I Bernoulli (1655-1705) in una sua nota sul calcolo degli interessi composti. Molto interessante è la storia e la genealogia della famiglia svizzera dei Bernoulli.[5] Jakob I fu il filosofo profondo della famiglia,

[4]Hobson E.W. (2012). John Napier and the Invention of Logarithms, 1614. (Lecture), Cambridge University Press. London, pp. 43–.ISBN978-1-107-62450-4.

[5]Nicolaus Bernoulli (il Vecchio) commerciante fu il capostipite, non era uno scienziato.I suoi primi figli furono Jakob I, Bernoulli. (1654–1705), maestro del calcolo infinitesimale e Johann I, Bernoulli cruciale per la diffusione del calcolo. Essendo i primi della famiglia gli storici gli attribuirono l'indicazione di "I", accanto al nome, per differenziarli dai loro successori, con il medesimo nome. Ebbero infatti vari discendenti fisici e matematici. Si veda l'albero (cf. www.afsu.it/

non si limitò a risolvere problemi di fisica, ma interessandosi anche di problemi di economia, fu il primo a capire che il caso, la fortuna e l'azzardo non costituiscono un caos imprevedibile, ma obbediscono a precise leggi matematiche. Fondò su tali imput una nuova scienza: la *Teoria della Probabilità*. Importante anche il fratello minore Johann I (1667–1748), estroso e battagliero. Fu il guerriero arrogante della famiglia,fu più proficuo del fratello in matematica e contribuì molto a diffondere il calcolo differenziale e integrale in Europa. Il suo campo d'attività comprendeva oltre la matematica, la fisica, la chimica e l'astronomia. In scienze applicate, lavorò in ottica, scrisse una *Teoria delle maree* e uno studio matematico sulle vele dei bastimenti, inoltre enunciò il "Principio degli spostamenti virtuali" in meccanica. Interessante che fu allievo di Leibniz e professore di Euler.

La prima citazione del numero di Nepero indicato con la lettera e, compare in due lettere di Gottfried Leibniz a Christian Huygens, del 1690 e del 1691. Fu proprio il matematico e fisico svizzero Leonhard Euler (1707-1783), considerato il più importante matematico del Settecento, allievo di Johann I ed uno dei massimi della storia.della matematica, che più di mezzo secolo dopo si occupò del simbolo e, che viene appunto anche detto numero di Eulero. Fu Euler che usa la lettera e per tale costante e il primo uso di e compare nella *Mechanica* di Eulero (1736), forse scelto perché iniziale della parola esponenziale. La sua definizione formale e una sua prima approssimazione sono dati da:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 2.718281828459045235360$$

Occorre qualche precisazione sull'esistenza e la finitezza dell'indicato limite. Servono un paio di teoremi.

/discipline/matematica/profili e periodi/ /matematici tra 1700 e 1800/Bernoulli famiglia).

Teorema 6.1. *La successione* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *è crescente, essendo:*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Dimostrazione. È ben noto che dati $n+1$ numeri reali: $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ tutti positivi, e un esponente naturale $n \geqslant 2$, la media geometrica di questi è sempre minore o eguale della media aritmetica. Si ha:

$$\sqrt[n+1]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n+1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}}{n+1}$$

valendo il segno = se e solo se $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1}$. Presi allora: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1 + \frac{1}{n}$ e $x_{n+1} = 1$, non tutti coincidenti, si ha:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}$$

elevando ambo i membri ad $n+1$, si ha:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

□

È ben noto che una successione monotona ammette sempre limite finito o infinito. Se la successione è crescente (decrescente) il limite coincide con l'estremo superiore (inferiore). Se inoltre la successione è anche limitata superiormente (inferiormente), tale limite esiste finito.Dimostriamo che la successione in esame è limitata

Teorema 6.2. *Per ogni naturale n> 1, si ha:*

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Dimostrazione.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} +$$
$$+\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} =$$
$$= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(k-1)}{n} =$$
$$= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

segue:

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) <$$
$$< 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} <$$
$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) <$$
$$< 1+2 = 3$$

□

Conseguenze

Segue, posto $1/m = x/n$, $n = xm$, la più generale espressione:

$$\lim_{n->\infty}(1+\tfrac{x}{n})^n = \lim_{m->\infty}[(1+\tfrac{x}{mx})^{mx}] = \lim_{m->\infty}[(1+\tfrac{1}{m})^m]^x = e^x$$

Si hanno le seguenti serie convergenti per ogni x reale:

$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$
$sinx = \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+\ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

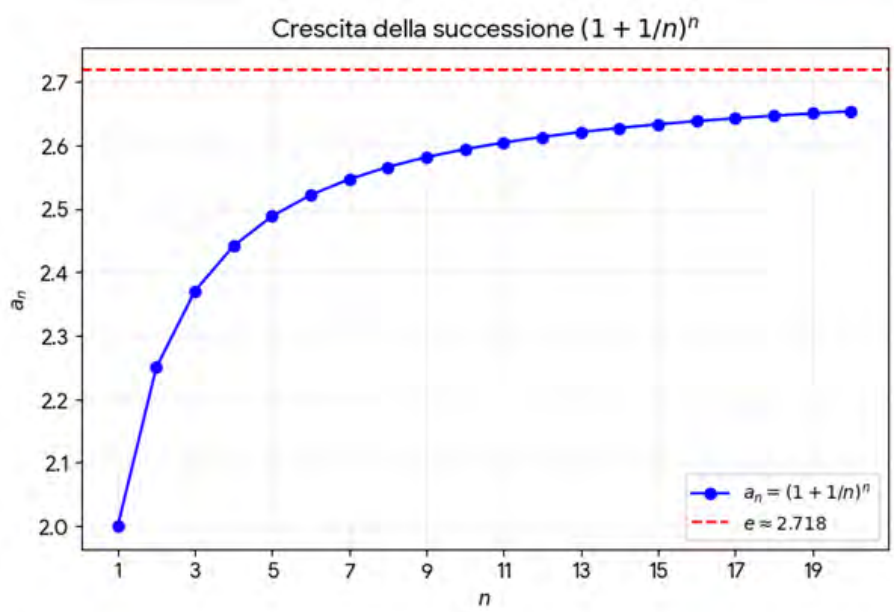


Fig. 5

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

mentre la serie logaritmica:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}$$

converge per $-1 < x \leqslant 1$, diverge altrimenti.

Completiamo le considerazioni esposte con l'introdurre le funzioni iperboliche.

Poniamo per definizione:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{25}$$

dalle quali si ha:

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$e^{x} = \cosh x + \sinh x$$

$$e^{-x} = \cosh x - sinhx$$

$$\cosh^{2} x - \sinh^{2} x = 1$$

Per $\sinh x$ e $\cosh x$ si hanno i seguenti sviluppi in serie:

$$sinhx = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$coshx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Il punto $P(x, y) = (coshx, sinhx)$ descrive l'iperbole equilatera di equazione:

$$x^2 - y^2 = 1$$

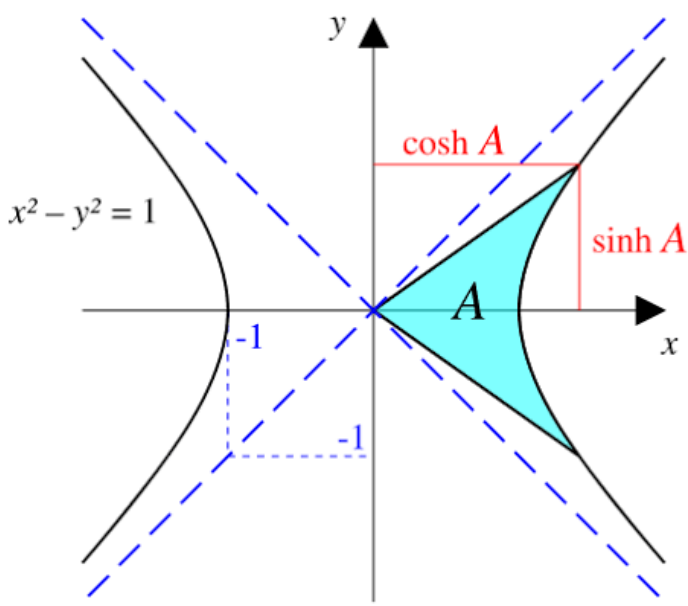


Fig. 6 - L'argomento delle funzioni iperboliche

Si noti che l'argomento (x) delle funzioni iperboliche è pari a due volte l'area indicata in figura 6, ovvero $(x) = 2A$.

Si può sviluppare una intera trigonometria iperbolica. Noi mostreremo solo come ricavare le formule di addizione delle aree:

$$\cosh(a+b) = \frac{e^{a+b}+e^{-\ (a+b)}}{2} = \frac{e^a+e^{-a}}{2}\frac{e^b+e^{-b}}{2} - \frac{e^a-e^{-a}}{2}\frac{e^b-e^{-b}}{2}$$

da cui, tenendo conto delle (25)

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \tag{26}$$

Analogamente si prova:

$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a \tag{27}$$

Da notare infine che la curva di equazione:

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{28}$$

prende il nome di catenaria ed è una curva di notevole interesse, presente in natura. Essa si presenta nel momento che appendiamo una catena a due chiodi, con la lunghezza maggiore a quella della distanza dei due chiodi, posti a egual altezza da terra, con la catena soggetta alla forza peso.

La curva "seno iperbolico" di equazione $y = \sinh x$ è meno importante e la sua immagine sembra confondersi con la parabola piana cubica.

Nota 6.2. *Il primo a esaminare la catenaria come curva fu Galileo Galilei nel 1638. Nella seconda giornata dei Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze, egli ipotizzò che la forma di una catena appesa per i suoi estremi, per via della forza di gravità potesse essere una parabola. Ma nella quarta giornata dello stesso dialogo, egli chiarisce vi è una netta distinzione tra la nuova curva catenaria e una parabola. Nel 1669 Joachim Jungius (1587-1657), professore a Giessen, dimostrò che la curva in questione non era una*

Fig. 7 - La Catenaria.

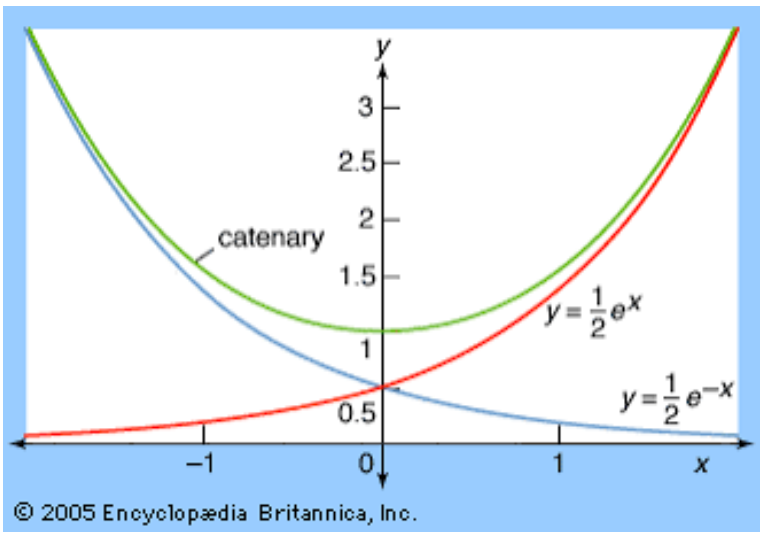


Fig. 8 - La Catenaria, media di esponenziali.

parabola. Nel 1691 Christian Huygens (1629-1695), Gottfried Leibniz (1646-1716) e Johann Bernoulli[6] *(1667-1748) dimostrarono che*

[6]Nicolaus Bernoulli (il Vecchio) commerciante fu il capostipite, non era uno scienziato.I suoi primi figli furono Jakob I, Bernoulli. (1654–1705): Maestro del calcolo infinitesimale e Johann I, Bernoulli cruciale per la diffusione del calcolo. Ebbero vari discendenti fisici e matematici. Si veda l'albero (cf. www.afsu.it

questa curva era una curva non algebrica, la curva fu chiamata catenaria dallo stesso Huygens, ma anche funicolare e velaria. Fu studiata anche da Leonhard Euler(1707-1783) che nel 1744 provò che la sua rotazione attorno all'asse delle ascisse genera una superficie minima cui diede il nome di catenoide.

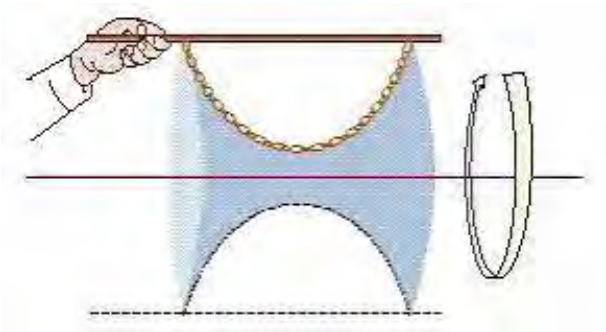


Fig. 9 - Catenaria e Catenoide.

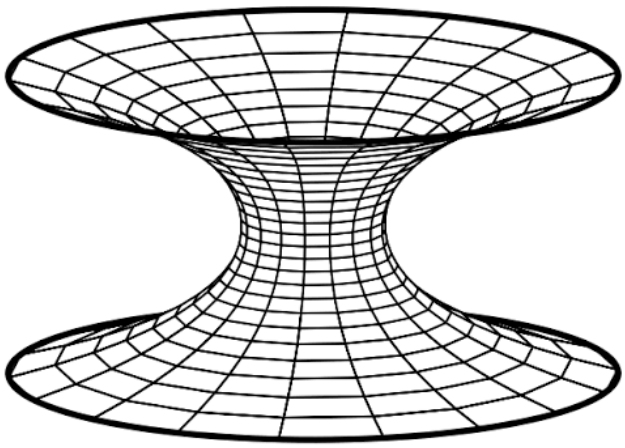


Fig. 10 - Catenaria.

/discipline/matematica/profili e periodi/ /matematici tra 1700 e 1800/Bernoulli famiglia).

Ricordiamo che una superficie si dice minima *se la sua* curvatura media *$(k_1 + k_2)/2$ è nulla in ogni punto, il che significa che le due curvature principali sono opposte ($k_1 = -k_2$). Dal punto di vista fisico le superficie minime rappresentano la forma che assume una pellicola di sapone, quando viene tesa su un contorno filiforme. Le più famose sono il piano, la Catenoide e l'Elicoide (che è rigata). Il Problema di Plateau*[7] *consiste nello studio dell'esistenza di una superficie minima, che abbia come bordo una data curva chiusa dello spazio.*

Per tornare alla catenaria ricordiamo anche che la sua forma rovesciata è sfruttata per creare archi e cupole strutturalmente efficienti, che distribuiscano il peso in modo ottimale, riducendo al minimo le spinte laterali e i materiali. Infatti quando è invertita, la curva catenaria lavora esclusivamente a compressione, eliminando la necessità di contrafforti esterni, a differenza degli archi a tutto sesto.

Fu Anton Gaudí y Cornet (1852-1926), il celebre architetto catalano,che ha reso famosa la catenaria, utilizzandola ampiamente nei suoi progetti, tra cui l'uso nella Cripta della Colonia Güell, *nei sottotetti di* Casa Batlló e Casa Milà (La Pedrera)*, e nella navata principale della* Sagrada Familia *sempre a Barcellona, progettando mediante modellini fisici in scala con fili, corde e pesi per determinare la forma ideale di archi e volte. La forma ottenuta, una volta invertita, rappresentava la struttura a compressione ideale.*

Nota 6.3. ***Importanza delle funzioni esponenziali****. La funzione esponenziale è di grande interesse perché è atta a descrivere sia la crescita rapida sia il decadimento, modellando fenomeni naturali come le popolazioni, le epidemie e la finanza. Le sue applicazioni chiave riguardano la crescita naturale e* ***il*** *decadimento radioattivo. Misura*

[7] Il problema fu proposto da Joseph-Louis Lagrange(1736-1813) nel 1760, tuttavia prende il nome dal fisico belga Joseph Plateau (1801-1883) che fece esperimenti su di esso tramite bolle di sapone. Plateau è noto, in particolare, per l'invenzione, nel 1832, di uno strumento ottico, il fenachistoscopio, che permetteva di visualizzare immagini animate: questa invenzione contribuì allo sviluppo della tecnica cinematografica.

Fig. 11 - Arco di catenoide rovesciata.

Fig. 12 - La catenaria usata da Gaudì.

la moltiplicazione dei batteri o la diffusione di un virus nel tempo, misura il decadimento degli atomi radioattivi o la carica di un condensatore.Determina il calcolo dell'interesse composto sugli investimenti bancari. È atta a rendere le formule pulite e prive di costanti residue. La derivata di $y = lnx = \log_e x$, $(x > 0)$ *è semplicemente*

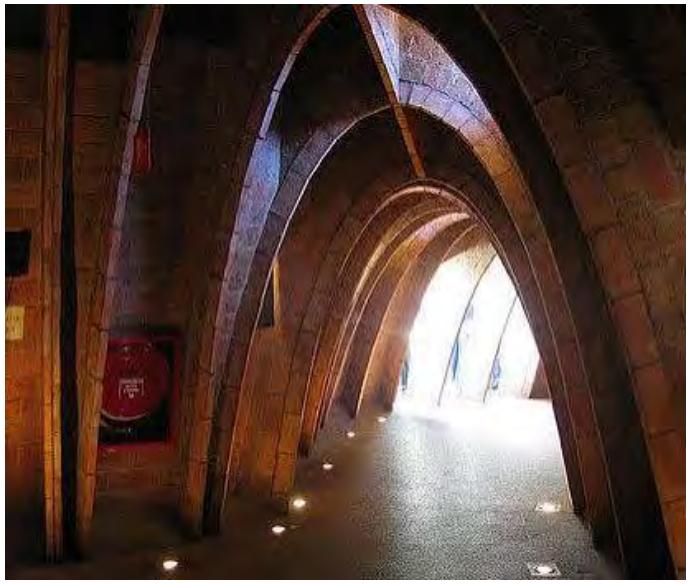


Fig. 13 - Un interno di Gaudì.

$1/x$. *Per qualsiasi altra base b, la derivata della funzione* $y = \log_b x$ *introduce un fattore di correzione essendo* $y' = 1/(x \ln e)$. *Altra interessante proprietà è che la funzione esponenziale* $y = e^x$, *è l'unica funzione che coincide esattamente con la sua derivata, avendosi* $y' = y = e^x$ *Nel caso di* $y = a^x$, *la derivata è* $y' = a^x \ln a$. *Inoltre la funzione* $y = \ln x$ *limitata tra le retta* $x = 1edx = qualsiasi$ $(x > 1)$ *rappresenta, da un punto di vista geometrico l'area racchiusa dall'iperbole* $y = 1/x$ $(x \geqslant 1)$ *dall'asse delle ascisse e dalle rette verticali da 1 ad* x $(x > 1)$, *in quanto:*

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$$

. *È l'inversa della funzione logaritmo* $y = \ln x$. *La curva gaussiana, nota anche come "distribuzione normale o a campana", è una funzione di probabilità continua simmetrica definita da due parametri principali: la* media μ *e la* deviazione standard σ, *e costanti importanti in statistica. La curva a campana è data da:*

$$y = \frac{\mathbf{1}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{x}-\mu}{\sigma}\right)^{\mathbf{2}}}$$

Nota 6.4. ***Mnemonica di e****. Anche se in generale il susseguirsi delle cifre decimali di* ***e*** *non ha alcuna regolarità, le prime presentano un andamento curioso. Osserviamole:* $2,718281828459045\ldots$*. Memorizzare una serie di cifre consiste nell'imparare una frase (in versi) in cui ogni parola ha il numero di lettere della cifra corrispondente. Nel caso di* ***e****, la prima parola deve avere 2 lettere, la seconda 7, la terza 1, la quarta 8 e così via. Nel 1935 la rivista «Sapere»indisse un concorso chiedendo ai lettori di presentare una frase o filastrocca dedicata al numero* ***e****. Eccone alcune:*

1. *La fedeltà è promessa, la felicità è speranza,la gioventù sola resta illusione*

2. *La bambina è affamata, la minestra è squisita, la scodella vien tosto terminata*

3. *La suocera è serpente, se ammalata è arsenico,se moritura, pace*

4. *Ai modesti o vanitosi, ai violenti o timorosi do, cantando gaio ritmo,logaritmo.*

Tutte si fermavano al massimo dopo 12 cifre decimali, il motivo è evidente: la cifra successiva è 0.

7 Bibliografia

1. Bononcini Vittorio Emanuele (1965). *Istituzioni di Matematica*. Bologna: Ed. Patron.

2. Cajoroi Florian (1929). *A History of Mathematical Notations* ,vol.I-II, Publ. Company "La Salle", Illinois

3. Cimmino Gianfranco (1953). *Istituzioni di Analisi Matematica*. Bologna: Ed. Patron.

4. De Finetti Bruno (1971). "Tre personaggi della Matematica: i numeri e, i, π ". In: «*Le Scienze*» n.39 (novembre del 1971 - edizione italiana di «Scientific American»), pp. 86–99, Milano: Editore Le Scienze S.P.A.

5. Eugeni Franco, Liberatore Antonio (1983). "Sulle potenze ad esponente frazionario", pp.126-137 in: *Atti del Convegno nazionale Mathesis "La matematica nell'educazione"*, Monopoli 26-30 Aprile 1981, Editrice Luciani, Roma.

8 Sitografia

1. https://it.wikipedia.org/wiki/Potenza_(matematica)

2. https://it.wikipedia.org/wiki/Prime_100000_cifre_di_e

Analisi trigonometrica del secondo libro di Archimede sui corpi galleggianti

Vittorio Bovolin*

DOI:10.53159/PdM(V).v1n2.173

Ricevuto 21-09-2026 Accettato 22-09-2026 Pubblicato 30-09-2026

Abstract: *Archimedes' treatise "On Floating Bodies" is the most significant text in Hellenistic science regarding the application of geometry to the solution of a physical problem. The technical and scientific significance of the treatise lies in the fact that it does not merely deals with the conditions of global equilibrium (so called Archimede's Principle), but it also addresses the more complex issue of analysing the stability of the equilibrium conditions. This paper focuses on presenting the content of the even-numbered Propositions in Book II, expressing them applying the tools of modern trigonometry. This approach makes it possible to highlight the comprehensive understanding that the treatise offers regarding a problem of great*

*Dipartimento Ingegneria Civile Università di Salerno, Fisciano, Italia; v.bovolin@unisa.it.

practical importance as the stability of floating bodies. The methodological framework established in the Treatise transcends the specific results related to the segment of a paraboloid used by Archimedes, providing a solid theoretical foundation applicable to solids of different shapes.

Keywords: Archimedes; Floating bodies; Hellenistic science

Sommario: *Il Trattato di Archimede sui Corpi galleggianti è il più significativo testo della scienza ellenistica che riguarda l'applicazione della geometria alla risoluzione di un problema fisico. La rilevanza tecnico-scientifica del Trattato consiste nel fatto che esso non si limita alla sola definizione delle condizioni di equilibrio globali (cosiddetto Principio di Archimede), ma affronta anche il più complesso problema della analisi della stabilità delle configurazioni dell'equilibrio. La presente Memoria si concentra sulla esposizione del contenuto degli enunciati delle Proposizioni pari del Secondo Libro esprimendoli mediante gli strumenti della moderna trigonometria. Tale approccio permette di focalizzare l'attenzione sulla completezza del quadro conoscitivo che il Trattato fornisce su un problema di rilevante importanza pratica come quello della stabilità dei corpi galleggianti. L'inquadramento metodologico fornito nel Trattato trascende i risultati relativi alla specifica forma di un segmento di paraboloide retto utilizzata da Archimede e fornisce una solida base teorica utilizzabile per successive applicazioni a solidi di forma differente. .*

Parole chiave: Archimede; Corpi galleggianti; Scienza ellenistica

1 La struttura del *Trattato sui corpi galleggianti*

Il *Trattato sui corpi galleggianti* (nel seguito *Trattato*) si compone di due libri: nel Primo Libro Archimede affronta il problema della definizione della condizione di equilibrio globale di un corpo galleggiante, mentre nel Secondo Libro approfondisce la questione relativa alla stabilità delle configurazioni di equilibrio. Il Primo Li-

bro contiene il postulato iniziale e 9 Proposizioni, mentre il Secondo Libro contiene 10 Proposizioni.

1.1 Primo Libro: condizione di equilibrio globale

Per una illustrazione ed analisi di dettaglio del contenuto del Primo Libro si rimanda a Bovolin (2025).

Archimede, nei primi 7 teoremi del Primo Libro, dimostra i diversi aspetti di ciò che viene comunemente indicato come il "Principio di Archimede".

Tali teoremi sono oggi sintetizzati con l'affermazione che il peso $\overrightarrow{P}$ di un corpo galleggiante è equilibrato dalla azione $\overrightarrow{A}$ (detta spinta di Archimede) esercitata dal liquido sul contorno della porzione del corpo galleggiante immersa nel liquido stesso.

La spinta $\overrightarrow{A}$ è pari al peso del volume di liquido occupato dalla porzione immersa del corpo galleggiante.

In termini algebrici la condizione di equilibrio globale si esprime come $P = A$, dove P e A sono rispettivamente i moduli di $\overrightarrow{P}$ e di $\overrightarrow{A}$.

1.2 Secondo Libro: stabilità delle condizioni di equilibrio

Il problema dell'analisi della stabilità delle configurazioni di equilibrio di un corpo galleggiante è l'oggetto del Secondo Libro. L'analisi di stabilità è svolta assegnando al corpo galleggiante, inizialmente in equilibrio, una perturbazione consistente in una rotazione del corpo, il successivo studio della disposizione dei punti di applicazione delle forze $\overrightarrow{P}$ e $\overrightarrow{A}$ nella posizione perturbata consente di stabilire se il corpo:

- rimane in equilibrio nella nuova posizione (equilibrio indifferente);
- reagisce con una coppia che riporta il sistema nella condizione di equilibrio iniziale (equilibrio incondizionatamente stabile);

- reagisce con una coppia che amplifica la perturbazione iniziale (equilibrio instabile) e che indirizza il sistema verso una nuova condizione di equilibrio stabile.

L'analisi della stabilità è introdotta nelle Proposizioni finali I-8 e I-9 del Primo Libro con riferimento al caso semplice di un segmento sferico.

2 Analisi delle Proposizioni I-8 e I-9

Le Proposizioni I-8 e I-9 affrontano lo studio della stabilità dell'equilibrio di un segmento sferico: nella Proposizione I-8 la base del segmento sferico è rivolta verso l'alto, mentre nella Proposizione I-9 la base è rivolta verso il basso.

Archimede in tutto il *Trattato* concentra la propria analisi sulle sole configurazioni di equilibrio che non intersecano la base del solido considerato, in altri termini la base del solido risulta sempre completamente emersa o completamente immersa.

Lo schema duale introdotto nelle Proposizioni I-8 e I-9 è riproposto anche nel Secondo Libro dove due Proposizioni successive fanno riferimento alla stessa configurazione geometrica: le Proposizioni pari con la base rivolta verso l'alto e le successive Proposizioni dispari con la base rivolta verso il basso.

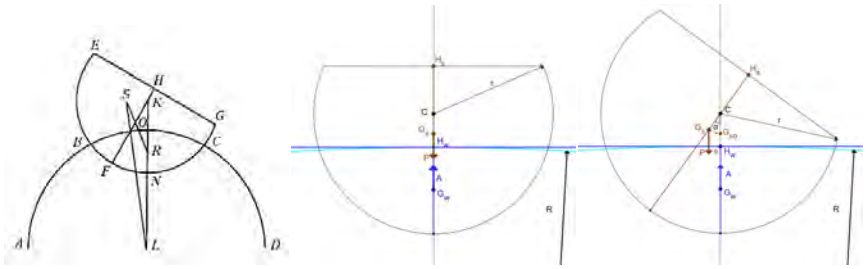
Per sviluppare l'analisi di stabilità è necessario determinare la posizione dei punti di applicazione delle forze $\overrightarrow{P}$ e $\overrightarrow{A}$.

La forza $\overrightarrow{P}$ è applicata nel baricentro delle masse del corpo galleggiante.

Nel *Trattato*, e nel prosieguo del presente articolo, la densità rho_s del corpo galleggiante è assunta costante, cosicché il baricentro delle masse del corpo galleggiante coincide con quello geometrico.

Archimede, per quanto riguarda la spinta $\overrightarrow{A}$ esercitata dal fluido, al termine della Proposizione I-7 scrive:

Si supponga che ogni solido spinto nel fluido in alto sia condotto per [una linea] perpendicolare diretta secondo il [proprio] centro del peso (Fleck, 2016) indicando che la spinta $\overrightarrow{A}$ agisce nel baricentro geometrico della porzione immersa.



(a). *Disegno da Heath (1897)*

(b). *Definizione forze e punti di applicazione*

(c). *Schema ruotato per analisi di stabilità*

Fig.1 - Rappresentazione grafica della Proposizione I-8

Per quanto riguarda il "modello meccanico del mondo" Archimede nel postulato iniziale del Primo Libro introduce il modello di "*gravità sferica*".

Secondo tale modello la gravità è diretta verso il centro della Terra, le superfici isobariche sono sfere concentriche con il centro della Terra stessa e porzioni della superficie del liquido sono rappresentabili mediante archi di circonferenza.

Archimede utilizza la gravità sferica nelle prime 5 Proposizioni del Primo Libro, mentre nelle successive due Proposizioni I-6 e I-7 e poi nell'intero Secondo Libro, senza commenti e/o spiegazioni, passa al modello di "*gravità verticale* o *ortogonale*".

Nel modello di "gravità verticale" la gravità agisce in direzione "verticale" o, più correttamente, in direzione "ortogonale" al piano tangente alla sfera terrestre, conseguentemente le superfici isobariche, compresa la superficie liquida, risultano orizzontali.

La rappresentazione del caso proposto nella Proposizione I-8 relativo alle condizioni di equilibrio di un segmento sferico con la base rivolta verso l'alto è riportata nella figura 1.

Nelle ultime due Proposizioni I-8 e I-9 del Primo Libro Archimede ritorna al modello di gravità sferica.

Le motivazioni del ritorno alla gravità sferica non sono spiegate, si può ipotizzare che la gravità sferica, consentendo di identificare con immediatezza la posizione del centro della Terra (figura 1a),

possa aiutare a introdurre più facilmente i diversi elementi geometrici che fanno parte dell'analisi di stabilità dell'equilibrio.

Con riferimento alla figura 1a del testo Archimedeo appare ragionevole ritenere che in tale disegno le scale geometriche di rappresentazione utilizzate per le rappresentazioni della Terra e del corpo galleggiante non siano uguali.

In particolare si deve ritenere che il segmento di sfera rappresentativo del corpo galleggiante sia, per ovvi motivi di rappresentazione grafica dei diversi elementi geometrici contenuti al suo interno, significativamente dilatato rispetto alle dimensioni effettive.

L'ipotesi di una scala di rappresentazione unica porrebbe due problemi concettuali:

- il primo riguarderebbe la identificazione e la natura stessa del corpo galleggiante considerato che esso avrebbe dimensioni geofisiche confrontabili con quelle della Terra stessa che lo allontanerebbe dall'idea comune di corpo galleggiante;

- il secondo, come messo in evidenza da Rorres (2016), riguarderebbe la circostanza che in tale caso lo schema meccanico di equilibrio dovrebbe tenere conto di effetti del secondo ordine che sono invece ignorati nelle dimostrazioni di Archimede.

Nelle figure 1b e 1c le superfici liquide sono disposte orizzontalmente e, come mero riferimento grafico, si è anche riportato l'arco relativo a una superficie sferica avente un raggio R pari a 20 volte il raggio r del segmento sferico.

Nell'approccio moderno il peso $\overrightarrow{P}$ del corpo galleggiante è applicato nel baricentro G_s del corpo galleggiante stesso mentre la spinta $\overrightarrow{A}$ è applicata nel baricentro G_w del volume immerso.

I baricentri G_s e G_w sono inizialmente allineati (*lungo asse del segmento sferico che giace sul raggio che congiunge il centro della Terra O con il centro del segmento sferico C*)/(*lungo la direzione verticale*) (figure 1a e 1b).

Nel caso in esame le proprietà di simmetria del segmento sferico semplificano lo studio delle condizioni di equilibrio (figura 1c) in

quanto il polo di rotazione del segmento sferico deve coincidere con il proprio centro C, ne consegue che a seguito di una rotazione:

- la forma del volume immerso V_w risulta immutata;
- la posizione di G_w risulta immutata;
- il centro della Terra O, il centro del segmento sferico C e il baricentro G_w rimangono allineati lungo il raggio iniziale (*lungo la direzione verticale*);
- il baricentro G_s segue rigidamente la rotazione del corpo galleggiante intorno a C disallineandosi rispetto al raggio iniziale (*gravità sferica*) o, in alternativa, alla direzione verticale sulla quale sono disposti C e G_w (*gravità verticale*);
- la coppia formata dal peso $\overrightarrow{P}$ e dalla spinta di Archimede $\overrightarrow{A}$ risulta opposta a quella della rotazione iniziale e tende a riportare il sistema nella posizione di equilibrio iniziale.

Nella Proposizione II-8 Archimede dimostra quindi che, qualunque siano le caratteristiche del segmento sferico considerato e qualunque sia la rotazione iniziale che non "bagni" la base, la configurazione di equilibrio verticale risulta incondizionatamente stabile.

3 Analisi delle Proposizioni del Secondo Libro

Il Secondo Libro affronta il caso più complicato della stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloide parzialmente immerso.

In tale caso, a seguito di una rotazione, entrambi i baricentri G_s del segmento di paraboloide e G_w della porzione immersa cambiano la propria posizione.

La rappresentazione grafica di un paraboloide di rotazione e di due piani secanti è riportata nella figura 2.

Il volume delimitato intersecando un paraboloide di rotazione retto (semi-assi a e b uguali) con un piano non parallelo all'asse è

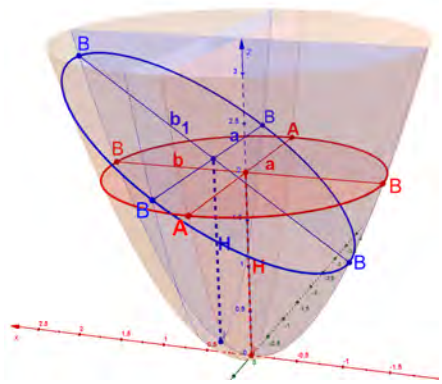


Fig.2 - Paraboloide di rotazione

detto "*segmento di paraboloide retto*" (nel seguito segmento di paraboloide), la figura piana delineata sul piano secante è detta "*base del segmento*", il contorno della base è detto "*spigolo del segmento*".

La forma della base dipende dalla inclinazione del piano secante:

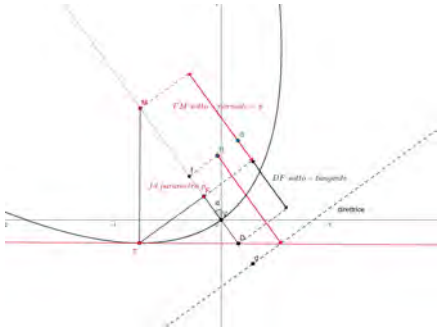
- se il piano secante è ortogonale all'asse del paraboloide la base risulta un cerchio di raggio a;
- se il piano secante è obliquo rispetto all'asse del paraboloide la base risulta una ellisse di semi assi a e b.

Nelle Proposizioni del Secondo Libro, Archimede rappresenta graficamente il segmento di paraboloide mediante la parabola base ottenuta secando il segmento di paraboloide con il piano che contiene l'asse maggiore b della ellisse.

Nel presente articolo la parabola base è descritta mediante l'equazione:

$$y = \frac{x^2}{2p} \tag{1}$$

Nella figura 3 sono specificate le proprietà della parabola base con riferimento al parametro p, alla sotto-normale FM ed alla sotto-tangente DF.



(a). *Parametro p, Sotto-normale FM e Sotto-tangente DF*

(b). *Relazioni tra FT, VF e Sotto-tangente DF*

Fig.3 - Proprietà geometriche della parabola base del segmento di paraboloide

Il parametro p della parabola base risulta pari alla distanza fd tra il fuoco f della parabola e la retta direttrice d ed è doppio della distanza focale tra il fuoco f ed il vertice V della parabola stessa

Il segmento FM corrisponde alla moderna sotto-normale, mentre il segmento FD corrisponde alla sotto-tangente.

La sotto-normale FM ha una lunghezza costante, indipendente dalla inclinazione a del paraboloide, pari al parametro p.

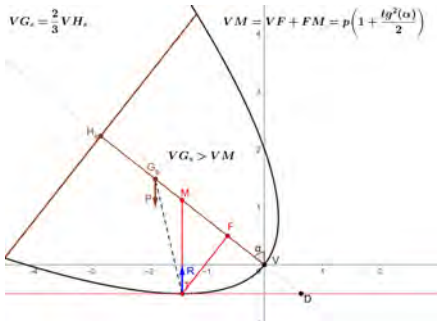
Il segmento VF ha una lunghezza pari a metà della sotto-tangente FD:

$$VF = \frac{FD}{2} = p\frac{tg^2(\alpha)}{2} \tag{2}$$

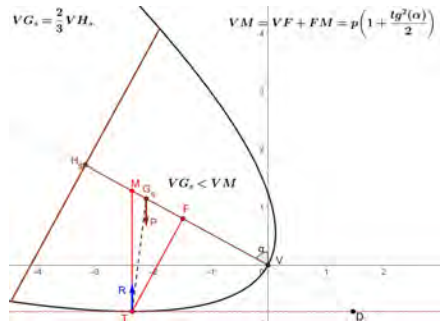
3.1 Stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloide su un piano di appoggio orizzontale.

Seguendo il suggerimento di Russo (2019) lo studio delle condizioni di equilibrio di un segmento di paraboloide posto su un piano di appoggio orizzontale (figura 4), può rappresentare una utile introduzione al più complesso caso di un segmento di paraboloide immerso fornendo utili indicazioni sui ragionamenti utilizzati nel *Trattato*.

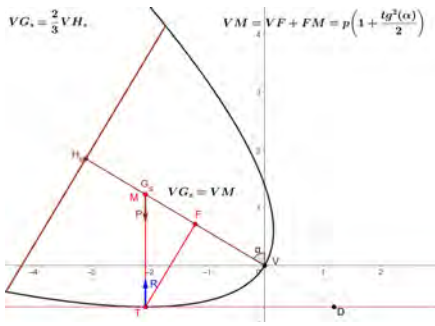
La condizione di equilibrio globale impone che sia $P = R$.



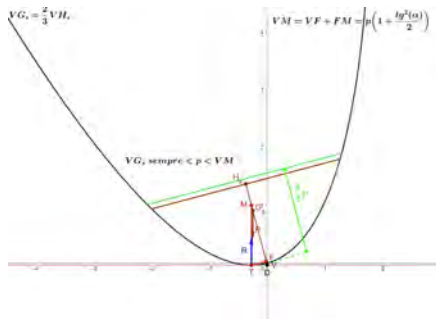
(a). *Coppia instabilizzante* $\Delta>0$



(b). *Coppia instabilizzante* $\Delta<0$



(c). *Coppia instabilizzante* $\Delta=0$



(d). $H_s<3/2p$
incondizionatamente stabile

Fig.4 - Schemi grafici per l'analisi della stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloide su un piano di appoggio orizzontale

Per studiare le condizioni di stabilità dell'equilibrio bisogna valutare le posizioni dei punti di applicazione del peso $\overrightarrow{P}$ del segmento di paraboloide e della reazione $\overrightarrow{R}$ del piano di appoggio.

Il peso $\overrightarrow{P}$ è applicato nel baricentro G_s del segmento di paraboloide, mentre la reazione $\overrightarrow{R}$ è applicata nel punto T di contatto tra il paraboloide ed il piano di appoggio, nel punto T la tangente al paraboloide risulta "orizzontale".

Il sistema è in equilibrio quando le forze $\overrightarrow{P}$ e $\overrightarrow{R}$ sono allineate lungo la stessa verticale.

Si considerino le seguenti distanze valutate a partire dal vertice V della parabola lungo l'asse del paraboloide inclinato:

- d_{Gs} distanza VG_S del baricentro G_s della sezione solida (rimane costante al variare della inclinazione a del paraboloide);
- d_M distanza VM del punto M proiezione del punto T sull'asse del paraboloide (varia al variare della inclinazione a del paraboloide).

Archimede ha dimostrato che il baricentro G_s di un segmento di paraboloide retto è posto lungo l'asse del segmento ad una distanza dal vertice V pari a 2/3 della altezza H_s per cui:

$$d_{Gs} = \frac{2}{3} H_s \tag{3}$$

L'osservazione della figura 4 evidenzia che la proiezione M si trova ad una distanza d_M dal vertice V del paraboloide pari alla somma del segmento VF al quale bisogna aggiungere la lunghezza del segmento FM.

La distanza d_M risulta pertanto:

$$d_M = p\frac{tg^2(\alpha)}{2} + p \tag{4}$$

definendo δ come:

$$\delta = d_M - d_{Gs} \tag{5}$$

e sostituendo le (3) e (4) nella (5) si ottiene:

$$\delta = p\frac{tg^2(\alpha)}{2} + p - \frac{2}{3}H_s \tag{6}$$

L'espressione della condizione di equilibrio $\delta = 0$ risulta:

$$p\frac{tg^2(\alpha)}{2} + p - \frac{2}{3}H_s = 0 \tag{7}$$

le cui radici sono:

$$tg(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{4}{3}\frac{H_s}{p} - 2} \tag{8}$$

e il cui determinante è:

$$\Delta = \frac{4}{3}\frac{H_s}{p} - 2 \tag{9}$$

Ne consegue che quando:

- $H_s > 3/2p$ (figure 4a, 4b e 4c) essendo $\Delta > 0$ esistono 2 soluzioni reali (rotazione destrogira o levogira) e l'angolo di equilibrio α_{eq} risulta:

$$\alpha_{eq} = arctg\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}\frac{H_s}{p} - 2}\right)) \tag{10}$$

- $H_s < 3/2p$ (figura 4d), essendo $\Delta < 0$ non esistono soluzioni reali e l'equilibrio risulta incondizionatamente stabile.

Le rappresentazioni grafiche delle soluzioni relative al campo $H_s > 3/2p$ sono riportate nelle figure 4a, 4b e 4c, dalle quali si ricava che quando:

- $\delta = d_M - d_{Gs} < 0$ la coppia formata da $\overrightarrow{P}$ e $\overrightarrow{R}$ è levogira e amplifica la rotazione iniziale (figura 4a);

- $\delta = d_M - d_{Gs} > 0$ la coppia formata da $\overrightarrow{P}$ e $\overrightarrow{R}$ è destrogira e si oppone alla rotazione iniziale (figura 4b);

- $\delta = d_M - d_{Gs} = 0$ la condizione è di equilibrio (figura 4c).

Il segmento di paraboloide, supposto inizialmente in posizione verticale, ruota su un lato fino a raggiungere l'angolo di equilibrio a_{eq}, in corrispondenza del quale il peso $\overrightarrow{P}$ e la reazione $\overrightarrow{R}$ giacciono lungo la stessa verticale e la proiezione M coincide con il baricentro G_s (figura 4c).

Se, a partire da questa condizione, si applica una qualsiasi ulteriore rotazione (figure 4a e 4b) il sistema reagisce con una coppia che riporta il sistema nella condizione di equilibrio α_{eq}.

La condizione di equilibrio incondizionatamente stabile $H_s < 3/2p$ è rappresentata nella figura 4d.

Esprimendo nella (9) il determinante Δ in funzione della distanza d_{Gs} (eq. 3) si ottiene:

$$d_{Gs} < p \tag{9'}$$

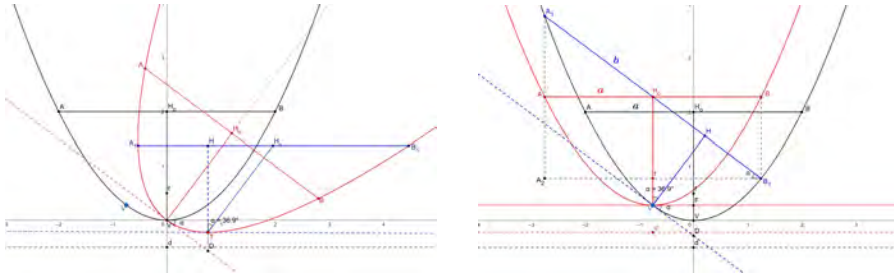
La circostanza che la sotto-normale di una parabola è una quantità costante pari al parametro p comporta che quando $d_{Gs} < p$ la proiezione M si trova sempre al di sopra del baricentro G_s del segmento stesso.

Tale condizione comporta che qualunque sia la rotazione iniziale che viene applicata, la coppia che si determina è sempre diretta in verso opposto a quello della rotazione imposta e ristabilisce la condizione di equilibrio verticale.

Dal punto di vista geometrico si può ancora osservare che la componente di d (eq. 6) legata alla sotto-tangente aumenta con l'aumentare della inclinazione a, ne consegue che il minimo della distanza d si verifica quando il segmento di paraboloide è posto in posizione verticale, quindi, se il segmento di paraboloide è in condizione di equilibrio stabile in posizione verticale, lo è anche per tutte le altre configurazioni.

3.2 Stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloide immerso

Nella figura 5 sono riportate due rappresentazioni della parabola base del segmento di paraboloide immerso.



(a). *Parabola "immersa" inclinata* (b). *Parabola "immersa" veticale*

Fig.5 - Modalità di rappresentazione del segmento paraboloide immerso

Nella figura 5a il segmento di paraboloide immerso è rappresentato nella configurazione "naturale" nella quale il segmento di paraboloide è inclinato e la corrispondente superficie liquida è disposta orizzontalmente

Nella figura 5b la rappresentazione del sistema è di tipo "concettuale": la condizione di immersione è rappresentata dalla parabola disposta verticalmente il cui vertice V giace lungo la parabola base ed è traslato verso l'alto della quantità VF.

La superficie liquida risulta inclinata ed è parallela alla tangente alla parabola base nel vertice V della parabola traslata.

La rappresentazione concettuale della figura 5*b*) permette, di ritrovare facilmente la dimostrazione di Archimede che "*i volumi di un segmento di paraboloide verticale e di un segmento di paraboloide inclinato sono uguali quando lo sono i rispettivi assi*."

È noto che il volume W di un segmento di paraboloide è pari al doppio del volume del cono inscritto nel segmento di paraboloide stesso.

Considerando i semiassi a e b della base del segmento (figure 2 e 5b) e le proprietà della parabola nel caso di segmento di paraboloide verticale (figura 4b) la base è circolare e il volume del segmento W di paraboloide è:

$$W = \frac{2}{3}\pi a^2 V H_o \tag{11}$$

Quando segmento di paraboloide è inclinato (figura 4b) la base è una ellisse ed il volume *W* risulta:

$$W = \frac{2}{3}\pi abVH \tag{11'}$$

in base alla similitudine dei triangoli H_oVH e $A_1B_1A_2$ risultano le due identità trigonometriche:

$$b = \frac{A_1B_1}{2} = \frac{AB}{2cos(\alpha)} = \frac{a}{cos(\alpha)}$$

$$VH = VH_ocos(\alpha)$$

che sostituite nella (11') ne dimostrano la uguaglianza con la (11).

3.3 Enunciati delle Proposizioni pari II-2, II-4, II-6 e II-8.

Sia H_s l'asse del segmento di paraboloide rappresentativo del corpo galleggiante e sia H_w l'asse della porzione del segmento di paraboloide immersa. Per comodità del lettore si riportano di seguito gli enunciati delle Proposizioni pari II-2, II-4, II-6 e II-8 del Secondo Libro:

Proposizione II-2

I segmenti di paraboloide retti per i quali H_s < 3/2p sono in condizione di equilibrio incondizionatamente stabile qualunque sia la densità del corpo galleggiante.

Proposizione II-4

I segmenti di paraboloide retti per i quali H_s >3/2p sono in condizione di equilibrio incondizionatamente stabile quando risulta soddisfatta la diseguaglianza $H_s - H_w$ <3/2p.

Proposizione II-6

I segmenti di paraboloide retti per i quali H_s < 15/4p, e quando non è rispettata la condizione del postulato 4 ($H_s - H_w$ <3/2p), hanno superfici di equilibrio che sono sempre interne al segmento stesso, in altri termini esse non tagliano la base del segmento.

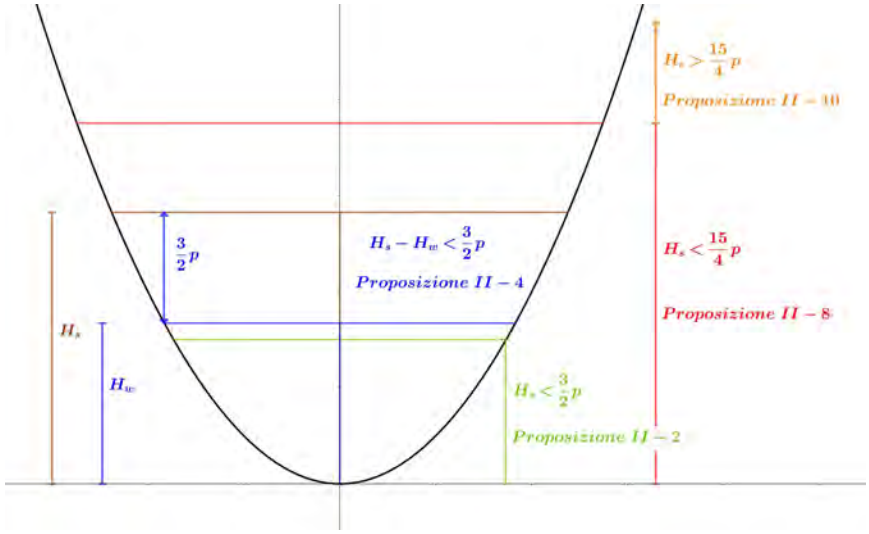


Fig.6 - Rappresentazione grafica della Proposizione I-8

Proposizione II-8

I segmenti di paraboloide retti definiti nella Proposizione II-6 non rimangono in equilibrio verticale, ma ruoteranno fino a quando l'asse formerà con la superficie del liquido l'angolo definito in seguito . . .

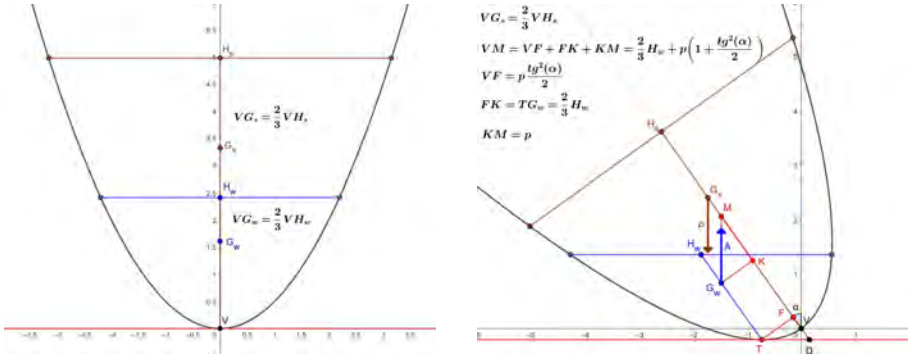
Una rappresentazione grafica dei campi di applicazioni delle Proposizioni del Secondo Libro è riportata nella figura 6.

3.4 Analisi delle Proposizione II-8, II-4 e II-2

Le Proposizioni II-8, II-4 e II-2 devono essere studiate congiuntamente in quanto il metodo per la determinazione delle condizioni di equilibrio è descritto nella Proposizione II-8.

In effetti si dimostra che la Proposizione II-4 è un caso particolare della Proposizione II-8 e che, a propria volta, la Proposizione II-2 è un caso particolare della Proposizione II-4.

Gli schemi grafici di base per lo studio della stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloide immerso sono riportati nella figura 7.



(a). *Disposizione verticale* (b). *Disposizione orizzontale*

Fig.7 - Schemi grafici per lo studio della stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloide immerso (Proposizione II-8)

Per lo studio delle condizioni di stabilità dell'equilibrio bisogna valutare la posizione del punto di applicazione della spinta di Archimede $\overrightarrow{A}$.

La figura 7b mostra che La spinta $\overrightarrow{A}$ agisce lungo la verticale passante per il baricentro G_w del volume immerso,

L'asse H_w del segmento di paraboloide immerso è parallelo all'asse inclinato del corpo galleggiante e passa per il punto di tangenza orizzontale *T*.

Per rispettare la condizione di equilibrio globale il volume immerso deve rimanere costante al variare dell'angolo di inclinazione *a*., ne consegue che il baricentro G_w della porzione immersa si trova ad una distanza dal punto *T* pari a 2/3 H_w.

La distanza d_M della proiezione verticale *M* del baricentro G_w del volume immerso sull'asse del paraboloide inclinato dal vertice *V* risulta:

$$d_M = p\frac{tg^2(\alpha)}{2} + \frac{2}{3}H_w + p \tag{12}$$

Tenendo conto della (5), risulta:

$$\delta = \frac{2}{3}\left(H_s - H_w\right) - p\left(1 + \frac{tg^2(\alpha)}{2}\right) \tag{13}$$

La condizione di equilibrio è:

$$\frac{2}{3}\frac{H_s - H_w}{p} - 1 - \frac{tg^2(\alpha)}{2} = 0 \tag{14}$$

le cui radici sono:

$$tg(\alpha_{eq}) = \pm\sqrt{\frac{4}{3}\frac{H_s - H_w}{p} - 2} \tag{15}$$

e il cui determinante è:

$$\Delta = \frac{4}{3}\frac{H_s - H_w}{p} - 2 \tag{16}$$

Per cui quando:

$$H_s - H_w > \frac{3}{2}p \tag{17}$$

gli angoli di equilibrio (rotazione destrogira o levogira) risultano:

$$\alpha_{eq} = arctg\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}\frac{H_s - H_w}{p} - 2}\right) \tag{18}$$

Quando invece:

$$H_s - H_w < \frac{3}{2}p \tag{19}$$

non essendoci soluzioni reali, il segmento di paraboloide risulta incondizionatamente stabile.

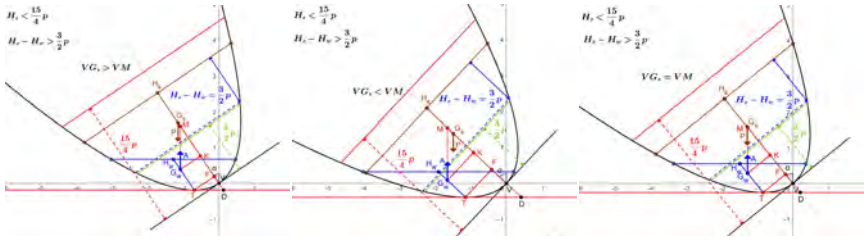
È immediato osservare che la (19) corrisponde all'enunciato della Proposizione II-4.

La (19) è sicuramente soddisfatta anche quando:

$$H_s < \frac{3}{2}p \tag{20}$$

che corrisponde all'enunciato della Proposizione II-2.

Gli schemi grafici rappresentativi delle soluzioni reali della (13) sono riportati nella figura 8.



(a). *Coppia instabilizzante δ>0*

(b). *Coppia stabilizzante δ<0*

(c). *Configurazioni di equilibrio δ=0*

Fig.8 - Schemi grafici per la analisi della stabilità dell'equilibrio di un segmento di paraboloide immerso (Proposizione II-8)

Con riferimento alla figura 8 risulta che quando:

$\delta = d_M - d_{Gs} > 0$ la coppia formata da $\overrightarrow{P}$ e $\overrightarrow{A}$ è levogira e amplifica la rotazione iniziale (figura 8a);

$\delta = d_M - d_{Gs} < 0$ la coppia formata da $\overrightarrow{P}$ e $\overrightarrow{A}$ è destrogira e si oppone alla rotazione iniziale (figura 8b);

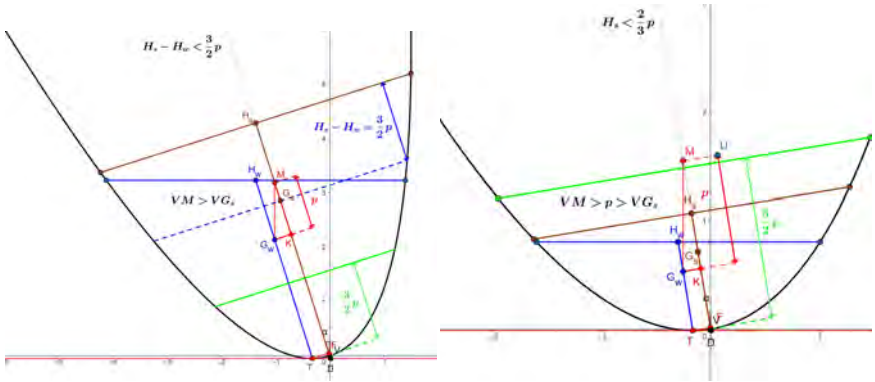
$\delta = d_M - d_{Gs} = 0$ la condizione è di equilibrio (figura 8c);

Gli schemi grafici esemplificativi delle condizioni associate alla Proposizione II-4 (eq. 19) ed alla Proposizione II-2 (eq. 20) sono riportati nella figura 9.

Analogamente al caso rappresentato nella figura 4d, anche nei casi rappresentati nella figura 9, il punto M per costruzione risulta sempre al di sopra del baricentro G_s del corpo galleggiante.

Il confronto tra la (20), relativa al segmento di paraboloide su piano orizzontale, e la (18), relativa al segmento di paraboloide immerso, evidenzia che nel caso di segmento di paraboloide immerso l'angolo di equilibrio risulta minore rispetto al caso su piano orizzontale.

Al tendere della lunghezza dell'asse del segmento di paraboloide immerso H_w a zero la soluzione della (18) tende asintoticamente a quella della (20) che conseguentemente rappresenta la massima inclinazione possibile del segmento di paraboloide immerso.



(a). *Proposizione II-4*
(coppia stabilizzante)

(b). *Proposizione II-2*
(coppia stabilizzante)

Fig.9 - Schemi grafici esemplificativi delle coppie stabilizzanti rappresentate dalle Proposizione II-4 e II-2.

3.5 Analisi della Proposizione II-6 e II-10

L'applicabilità dei risultati della Proposizione II-8 è limitata dalla circostanza che il modello utilizzato per la derivazione della condizione di equilibrio stabile definita dalla eq. (18) non tiene conto che l'altezza del segmento di paraboloide H_s è "finita", in altri termini non tiene conto della possibilità che la superfice di equilibrio possa intersecare la base del segmento di paraboloide circostanza che ovviamente modifica lo schema di calcolo geometrico-fisico utilizzato.

Affinché le soluzioni della (18) siano accettabili è pertanto necessario verificare che la superficie liquida di equilibrio non intersechi la base del segmento.

A tal fine nelle Proposizioni II-6 e II-10 Archimede studia la condizione di equilibrio limite relativa alle superfici del liquido aventi le basi vincolate nello spigolo del segmento di paraboloide.

Sia H_{wsp} l'asse della superficie liquida passante per lo spigolo A della base del segmento di paraboloide.

Lo schema grafico per la definizione della relazione esistente tra gli assi H_s e H_{wsp} relativa alla Proposizione II-6 è riportata nella

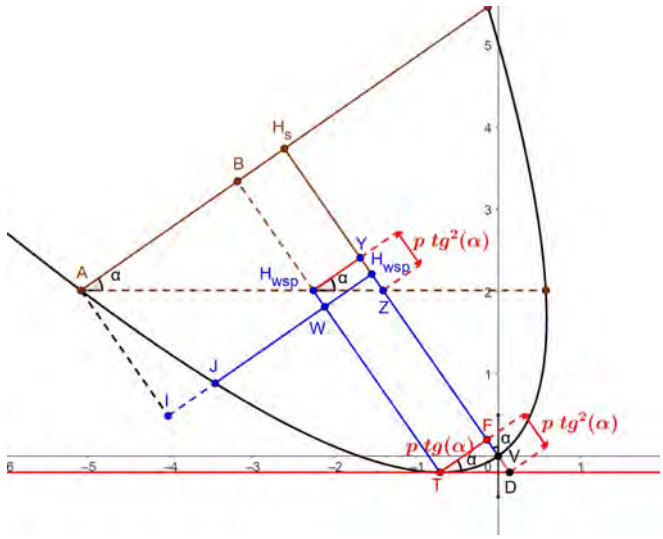


Fig.10 - Schema grafico per la definizione della relazione tra Hs e Hwsp nella Proposizione II-6.

figura 10.

La relazione algebrica che lega tra di loro gli assi H_s e H_{wsp} risulta:

$$\sqrt{2pH_s} - \sqrt{2pH_{wsp}} = ptg(\alpha) \tag{21}$$

L'equazione rappresentativa della Proposizione II-6 si deriva combinando la (22) e la (14) ed esprimendo la differenza *d*:

$$d = H_{wsp} - H_w \tag{22}$$

ottenendo:

$$\frac{d}{p} = \frac{5}{4}tg^2(\alpha) - \sqrt{2\frac{H_s}{p}}tg(\alpha) + \frac{3}{2} \tag{23}$$

La condizione di equilibrio (H_{wsp}=H_w) risulta:

$$5tg^2(\alpha) - 4\sqrt{2\frac{H_s}{p}}tg(\alpha) + 6 = 0 \tag{24}$$

il cui determinante Δ è:

$$\Delta = 4\frac{H_s}{p} - 15 \tag{25}$$

Lo studio della eq. (24) comporta che quando:

- $\frac{H_s}{p} = \frac{15}{4}$ –> $\Delta > 0$ esistono 2 soluzioni reali distinte (Proposizione II-10);
- $\frac{H_s}{p} = \frac{15}{4}$ –> $\Delta = 0$ esistono 2 soluzioni reali coincidenti che rappresentano la configurazione di equilibrio vincolata nello spigolo della base (Proposizione II-6);
- $\frac{H_s}{p} < \frac{15}{4}$ –> $\Delta < 0$ non esistendo soluzioni reali, tutte le configurazioni di equilibrio risultano interne al segmento di paraboloide (Proposizione II-8).

Il valore *15/4p* ha una semplice interpretazione geometrica esso rappresenta l'altezza della sezione solida il cui baricentro G_s è ottenuto sommando il parametro p alla altezza idrica H_w definita dalla Proposizione II-2.

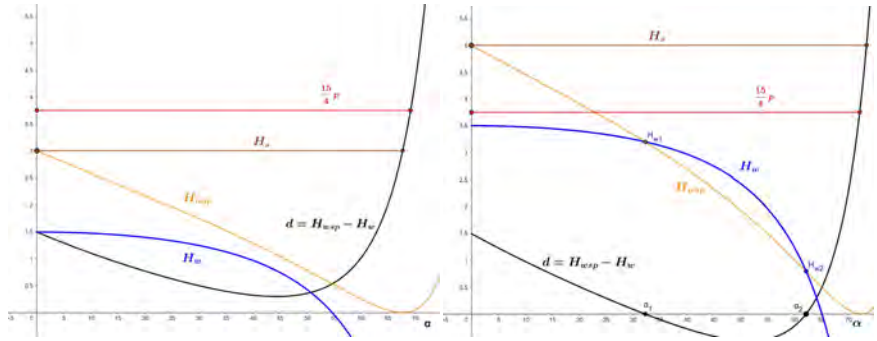
3.6 Ulteriore analisi della Proposizione II-10

Archimede affronta nella Proposizione II-10 due ulteriori questioni: la definizione del significato fisico delle soluzioni di equilibrio della (24) quando $\Delta > 0$ e l'espressione dei rapporti geometrici presenti nella Proposizioni del Secondo Libro in termini di rapporti di densità tra corpo galleggiante e liquido.

Per quanto riguarda il significato fisico della (24) nella figura 11 sono riportati gli andamenti delle funzioni H_w (eq. 14), H_{wsp} (eq. 22) e d (eq. 22) relativi ai campi della Proposizione II-8 (H_s*>15/4p* figura 11a) e della Proposizione II-10 (H_s*<15/4p* figura 11b).

H_s, H_{wsp}, H_w e d per le Proposizioni II-6 e II-10

La figura 11a mostra che, quando H_s*>15/4p*, la funzione H_w e la funzione H_{wsp} si incrociano in 2 punti indicando che esistono 2 superfici di equilibrio che passano per lo spigolo della base del segmento di paraboloide (Proposizione II-10).



(a). *Hs>15/4p (Proposizione II-8)* (b). *Hs<15/4p (Proposizione II-10)*

Fig.11 - Rappresentazione delle funzioni H_s, H_{hws}, H_w e d per le Proposizioni II-6 e II-10

La condizione H_s=*15/4p* corrisponde al caso per il quale la funzione H_w interseca la funzione H_{wsp} in un singolo punto, indicando che la sola condizione di equilibrio H_w passa per lo spigolo della base del segmento di paraboloide (Proposizione II-6).

La figura 11b mostra che, quando H_s<*15/4p*, la funzione H_w risulta costantemente al di sotto della funzione H_{wsp} indicando che, non essendoci intersezioni tra le 2 curve, le superfici di equilibrio H_w sono sempre contenute all'interno del segmento di paraboloide (Proposizione II-8).

Le soluzioni della (24) nel caso H_s>*15/4p* rappresentano gli angoli di equilibrio a_{eq}:

$$\alpha_{eq} = arctg\, 2\left(\sqrt{2\frac{H_w}{p}} \pm \sqrt{2\frac{H_w}{p} - \frac{3}{2}}\right) \tag{26}$$

Gli schemi grafici relativi alle condizioni di equilibrio relative alla Proposizione II-10 sono riportati nella figura 12.

L'osservazione della figura 12 comporta che quando:

- le superfici di equilibrio associate ad angoli esterni alle due radici a_1 e a_2 della eq. (26), essendo $d > 0$ ($H_{wsp} > H_w$), non intersecano la base del segmento e sono quindi interne al paraboloide;

(a). *Passante per lo spigolo* $\alpha=\alpha_1$

(b). *Intersecante la base* $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$

(c). *Passante per lo spigolo* $\alpha=\alpha_2$

Fig.12 - Schemi grafici relativi alle superficie di equilibrio analizzate nella Proposizione II-10

- le superfici liquide di equilibrio associate ad angoli coincidenti con le due radici a_1 e a_2, essendo $d = 0$ ($H_{wsp} = H_w$), passano per lo spigolo della base;
- le superfici liquide associate agli angoli a interni alle radici, essendo $d < 0$ ($H_{wsp} < H_w$), intersecano la base del segmento.

Archimede, in conclusione della Proposizione II-10, rielabora i risultati di tutte le Proposizioni pari in termini di densità relativa tra la densità ρ_s del corpo galleggiante e la densità ρ_w del liquido.

A tal fine Archimede fa riferimento alla Proposizione II-1 del Secondo Libro che espressa in termini moderni risulta:

$$\frac{\rho_s}{\rho_w} = \frac{H_w^2}{H_s^2} \tag{27}$$

Il caso della Proposizione II-2 ($H_s<3/2p$) risulta banale in quanto, essendo soddisfatta anche nel caso di corpo non immerso, ne consegue che essa è valida per qualsiasi valore della densità ρ_s del corpo galleggiante.

Nel caso della Proposizione II-4 applicando la (27) nella (19), si ottiene:

$$\frac{\rho_s}{\rho_w} < \left(1 - \frac{3}{2}\frac{p}{H_s}\right)^2 \tag{28}$$

Ne consegue che per garantire una condizione di equilibrio incondizionatamente stabile all'aumentare delle dimensioni H_s del corpo galleggiante deve aumentare la densità ρ_s del corpo stesso.

Il caso della Proposizione II-10 richiede una ulteriore elaborazione.

La figura 11a, rappresentativa del caso $H_s/p>15/4$, evidenzia che alle due radici α_1 e α_2 della eq. (24) corrispondono i due valori H_{w1} e H_{w2}.

Per determinare le altezze liquide H_{w1} e H_{w2}, esprimendo la condizione di vincolo nello spigolo (eq. 21) in funzione di $tg(\alpha)$ e sostituendola nella condizione di equilibrio del segmento di paraboloide (eq. 14) si ottiene:

$$5H_w - 6\sqrt{H_s}\sqrt{H_w} + H_s + 3p = 0 \tag{29}$$

Assumendo H_s come parametro e H_w come incognita e ponendo $z = \sqrt{H_w}$ risulta:

$$z^2 - 6\sqrt{H_s}z + H_s + 3p = 0 \tag{30}$$

Le cui 2 soluzioni reali risultano:

$$\sqrt{H_w} = \frac{3\sqrt{H_s} \pm \sqrt{4H_s - 15p}}{5} \tag{31}$$

Applicando la eq. (27) nella eq. (31) si ottiene:

$$\frac{\rho_s}{\rho_w} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{4 - 15\frac{p}{H_s}}}{5} \right)^4 \tag{32}$$

Il caso della Proposizione II-6 risulta come un caso particolare della (32) quando il determinante Δ=0:

$$\frac{\rho_s}{\rho_w} = 0.1296 \tag{32'}$$

4 Conclusioni

I risultati riportati nel *Trattato sui corpi galleggianti* di Archimede, illustrati nel presente articolo, non appaiono di immediata applicazione pratica in quanto la figura geometrica utilizzata da Archimede appare lontana dalle forme che sono normalmente utilizzate per la costruzione degli scafi dei natanti reali.

Purtuttavia essi presentano una notevole utilità metodologica sia per quanto riguarda la identificazione delle possibili configurazioni di equilibrio sia per quanto riguarda l'estensione dello studio ad altre forme geometriche.

La distinzione tra configurazioni di equilibrio incondizionatamente stabili verticali (Proposizioni II-2 e II-4) e quelle per le quali la stabilità è raggiunta a seguito della inclinazione del corpo galleggiante (Proposizione II-8) è senza dubbio una importante classificazione tecnica.

In tal senso la Proposizione II-6 indica che, fintanto che la dimensione del corpo galleggiante non supera un prefissato valore critico, le configurazioni di equilibrio inclinate sono tali che il bordo libero del natante rimane al di sopra della superficie del.

Dal punto di vista metodologico il riferimento ai baricentri come punti di applicazione del peso e della spinta di Archimede è fondamentale per l'estensione del metodo al caso di corpi galleggianti aventi densità non omogenea.

Dal punto di vista delle possibili applicazioni pratiche è anche molto significativa la consapevolezza mostrata da Archimede nella Proposizione 10 dove chiarisce che i rapporti geometrici presenti nelle diverse Proposizioni dipendono da corrispondenti rapporti tra le densità del solido e quella del liquido.

In tal senso la (29) appare, forse, come la più rilevante in quanto fornisce una chiara indicazione che al fine di garantire una condizione di equilibrio incondizionatamente stabile l'aumento delle dimensioni del natante deve essere accompagnato da un corrispondente aumento della sua densità.

La possibile applicazione operativa del metodo proposto da Archimede nel Trattato richiederebbe l'estensione dello studio a forme

geometriche maggiormente rappresentative delle effettive forme che caratterizzano lo scafo di un natante.

Nell'ambito dei solidi tridimensionali si può pensare, ad esempio, a segmenti di paraboloidi di rotazione non retti o a segmenti di sferoide.

Mentre, a partire da curve bidimensionali come segmenti di parabole o di ellisse, si può pensare a solidi di forma cilindrica per le quali le curve bidimensionali siano le generatrici.

Ovviamente tali operazioni richiederebbero la rivalutazione dei particolari coefficienti numerici riportati da Archimede nelle diverse Proposizioni del Trattato che sono ovviamente specifici della particolare forma tridimensionale studiata da Archimede.

5 Bibliografia

1. Bovolin L. (2025), *Il Teorema di Archimede sui corpi galleggianti*. Periodico di Matematica Anno XXXX – Serie IV – Volume VII (3) Supplemento Dicembre 2025, Accademia di Filosofia delle Scienze Umane

2. Fleck H. (2017) Archimede Sui Corpi Galleggianti, https://www.heinrichfleck.net/quaderni/corpi20galleggianti.pdf

3. Rorres C. (2016). *Archimedes' floating bodies on a spherical*, Earth. Earth, Am. J. Phys. 84 (1), January 2016

4. Russo L. (2019), *Archimede: un grande scienziato antico*. Carocci editore, Firenze.

Edizioni del Trattato sui corpi galleggianti di Archimede:

1. Frajese A. (1974). *Archimede: Opere*, UTET, Torino. pp.519-553

2. Heath T. L. (1897). *The work of Archimedes*: *On floating bodies*, Cambridge University Press: C. & J. Caly and sons London pp. 253-300

Paolo Severino Manca
PRENDERE DECISIONI: UOMINI E MACCHINE
Metodi e modelli a supporto delle decisioni
SAGGI E STUDI
PISA UNIVERSITY PRESS

Periodico di Matematica (V) Anno XLI Vol.I(2) settembre 2026, pp.75-100

Come costruire una semplice meridiana

Giuseppe D'Angelo*

DOI:10.53159/PdM(V).v1n2.174

Ricevuto 19-06-2026 Accettato 30-09-2026 Pubblicato 30-09-2026

Abstract: *This paper presents a simplified procedure for designing and constructing a horizontal sundial with a vertical gnomon, conceived as an educational tool for introducing readers to gnomonics and observational astronomy. After a brief overview of the operating principles of sundials and the apparent motion of the Sun, the main astronomical and geographical parameters required to determine the position of the gnomon's shadow throughout the year are described. In particular, the annual variation of solar declination is examined, and Cooper's formula is used as a first-order approximation to calculate its daily values. Based on the geographical latitude and longitude of the site and on the length of the gnomon, the shadow lengths for different days of the year are then determined, with particular reference to the solstices and equinoxes. The paper also discusses the geometrical and astronomical criteria required to*

*Docente di materie scientifiche presso il Liceo Scientifico "Leonardo" di Giarre - CT); sitdang010762@mail.com.

draw the hour lines of a horizontal sundial with a vertical gnomon, using the solar altitude and azimuth. An application example, referring to a site in eastern Sicily, illustrates how the calculations can be implemented using a spreadsheet and, for automation, a simple macro. Finally, low-cost and easily reversible construction solutions are proposed, including the possible use of pre-existing architectural elements such as vertical railing bars. Although the proposed method relies on several approximations, its purpose is to provide an accessible practical introduction to gnomonics by combining astronomical, mathematical, technological, and artistic aspects.

Keywords: Gnomonics; Sundial; Astronomy

Sommario: *L'autore propone una procedura semplificata per la progettazione e la realizzazione di una meridiana orizzontale con gnomone verticale, concepita come strumento didattico per avvicinare alla gnomonica e all'astronomia osservativa. Dopo una breve introduzione ai principi di funzionamento delle meridiane e al moto apparente del Sole, vengono illustrati i principali parametri astronomici e geografici necessari per determinare la posizione dell'ombra dello gnomone nel corso dell'anno. È analizzata la variazione della declinazione solare e utilizzata, in prima approssimazione, la formula di Cooper per il suo calcolo giornaliero. A partire dalla latitudine e dalla longitudine del luogo e dalla lunghezza dello gnomone, sono quindi determinate le lunghezze delle ombre nei diversi giorni dell'anno, con particolare riferimento ai solstizi e agli equinozi. Il lavoro affronta inoltre i criteri geometrici e astronomici necessari per tracciare le linee orarie di una meridiana orizzontale con gnomone verticale, attraverso la determinazione dell'altezza e dell'azimut solare. Un esempio applicativo mostra come i calcoli possano essere implementati mediante un foglio elettronico e, per automatizzare le operazioni, mediante una semplice macro. Infine, vengono proposte soluzioni costruttive economiche e facilmente reversibili, basate anche sull'eventuale utilizzo di elementi architettonici preesistenti, come le barre verticali di una ringhiera. L'approccio proposto, pur basandosi su alcune approssimazioni, intende fornire uno strumento accessibile per un primo approccio pratico alla gnomonica, integrando aspetti astronomici, matematici, tecnologici e artistici.*

Parole chiave: gnomonica; meridiana solare; astronomia

1 Introduzione

La scienza delle meridiane e degli orologi solari si chiama Gnomonica. Meridiane e orologi solari sono tra gli oggetti più antichi utilizzati per scandire lo scorrere del tempo. Il principio del loro funzionamento è basato sulla variazione nel corso dell'anno e del giorno della lunghezza e della direzione dell'ombra proiettata da un'asta (gnomone) che può essere posta verticalmente sul piano orizzontale o ortogonalmente rispetto ad una parete verticale o, ancora, inclinata rispetto ad essi. La loro storia è lunga e affonda le radici nell'antichità, con testimonianze che risalgono addirittura al Neolitico. Conosciute nell'antico Egitto e presso altre civiltà e, successivamente, tra quella dei Greci e dei Romani, hanno sempre rappresentato una curiosa attrattiva culturale per chiunque le osserva. In esse elementi artistici e scientifici spesso si sommano interessando, quasi in modo ammaliatore, coloro che le consultano. La differenza tra meridiane e orologi solari non è radicale. Mentre una meridiana di solito si limita ad indicare il tempo, il mezzogiorno, le stagioni e i segni zodiacali, gli orologi solari vengono utilizzati prevalentemente per scandire il passare delle ore durante il periodo diurno giornaliero e conoscere inoltre i momenti dei solstizi e degli equinozi oltreché la direzione Nord-Sud. Spesso le meridiane vere e proprie è possibile osservarle all'interno di chiese come quella presente nella Basilica di Santa Maria degli Angeli e dei Martiri a Roma, quella della Basilica di San Petronio a Bologna, quella della Chiesa di Santa Maria Bianca a Lucca o quella all'interno del Duomo di Acireale (CT). Esse funzionano attraverso un foro gnomonico nel soffitto che proietta un raggio di sole sul pavimento che segna il passaggio del sole a mezzogiorno e identifica il giorno e il periodo dell'anno. Gli orologi solari con le linee orarie possono essere di vario tipo con principi costruttivi più o meno differenti [1] . In questo semplice resoconto si parlerà però sol-

[1]Esistono principalmente 2 tipologie di orologi solari: la meridiana verticale e quella orizzontale. La prima tipologia è formata dallo gnomone installato nella corretta posizione direttamente nella parete, posizionato sopra ad un affresco che scandisce il tempo. Nella seconda tipologia possiamo trovare sempre la pre-

tanto delle meridiane orizzontali. Esse possono essere realizzate con lo stilo (gnomone) parallelo all'asse di rotazione terrestre (quindi che punta al polo nord) o con stilo verticale rispetto al piano orizzontale. Si proporrà, nello specifico, di realizzare un orologio solare semplificato con stilo verticale e la sola linea meridiana da porre all'aperto, magari in terrazza. La sua struttura è quindi molto semplice: un'asta verticale di opportuna lunghezza che proietta l'ombra su di una superficie orizzontale. I motivi di questa scelta sono due. Il primo è quello di proporre una procedura semplificata per la realizzazione di un orologio solare in modo da invogliare il lettore ad avvicinarsi a questa arte scientifica millenaria. Il secondo motivo è poi quello che, a volte, nella propria abitazione possono esistere già delle strutture (meridiane sotto mentite spoglie) che potrebbero essere utilizzate appunto come base per realizzare degli orologi solari. In questo caso si può conseguire anche l'obiettivo di ridurre notevolmente i costi di realizzazione semplificando le modalità di realizzazione. La possibilità di realizzare una semplice meridiana o un completo orologio solare si offre facilmente, ad esempio, a chi può disporre di terrazze ben esposte a sud, illuminate durante tutto l'anno. Poiché spesso le terrazze sono dotate di ringhiera si potrebbe provare ad utilizzare tali strutture per approntare una meridiana piuttosto particolare. In questo caso, se la ringhiera fosse costruita con una serie di semplici barre verticali, realizzare uno di questi strumenti diventa realmente una cosa piuttosto semplice. Se si fa una scelta di questo tipo bi-

---

senza dello gnomone ma, a differenza di quella verticale, avremmo le linee che scandiscono il tempo disegnate o incise su materiali differenti come marmo o metallo posti sul piano orizzontale. Esistono poi meridiane polari, analemmatiche ed equatoriali.

`https://www.orologisenzatempo.com/prodotto/meridiana-equatoriale-da-giardino/`

`http://fram.interfree.it/meridiane/analemmatica.htm`

`https://www.arsumbrae.it/meridiana_analemmatica.htm`

Meridiana polare del Monte Calino

Meridiana verticale: progettazione e realizzazione

sogna però tenere in considerazione che poiché la lunghezza della barra della ringhiera utilizzata come gnomone non può essere lunga quanto necessita l'ombra che essa proietta risulta troppo corta per permettere di separare opportunamente, lungo il suo percorso, le date di tutti i giorni dell'anno. Si verifica infatti un affastellamento delle stesse soprattutto nel semestre estivo a ridosso del solstizio d'estate. Questo limite non può essere ridotto se si vuole utilizzare come gnomone siffatto elemento architettonico. Qualsiasi tentativo sacrificherebbe ulteriormente i già precari elementi artistici dell'opera. È quindi necessario rinunciare in partenza all'idea di avere una meridiana che segni chiaramente le singole date dell'anno ed accontentarsi di informazioni più generiche che potrebbero essere ad esempio il mese in corso o, al più, la settimana del mese stesso (esempio, la settimana di Pasqua), i giorni degli equinozi (peraltro, coincidenti sulla linea meridiana) e dei solstizi (gli estremi della stessa) oltreché il momento del mezzogiorno e gli intervalli temporali nei quali ricadono i segni zodiacali [2]. Insomma, una buona occasione per imparare ed appassionarsi ma senza grandi pretese! Bisognerà quindi valutare se si desidera fare un primo tentativo [3] realizzando un orologio solare semplificato, come quello qui proposto, o completare il lavoro aggiungendo anche le linee orarie. In questo secondo caso non converrà più affidarsi ad elementi strutturali già esistenti ma bisognerà scegliere differenti materiali per la realizzazione del proprio orologio solare. Se l'esposizione del lastrico non fosse perfettamente libera da Est o da Ovest l'opzione di realizzare una meridiana senza

[2]Gli estremi di tali intervalli non potranno essere netti e precisi principalmente a causa dell'affastellamento delle date sopra ricordato. Entrano in gioco anche altri fattori come la differenza tra anno civile ed anno solare che viene ridotta con l'anno bisestile mentre la data di inizio e di fine di tutti i segni zodiacali è fissa: Ariete (21 marzo – 20 aprile), Toro (21 aprile – 20 maggio), Gemelli (21 maggio – 21 giugno), Cancro (22 giugno – 22 luglio), Leone (23 luglio – 23 agosto), Vergine (24 agosto – 23 settembre), Bilancia (24 settembre – 23 ottobre), Scorpione (24 ottobre – 22 novembre), Sagittario (23 novembre – 21 dicembre), Capricorno (22 dicembre – 20 gennaio), Acquario (21 gennaio – 19 febbraio) e Pesci (20 febbraio – 20 marzo).

[3]Magari come prova tecnica non necessariamente durevole nel tempo.

linee orarie potrebbe essere una scelta ragionevole [4]. Si descrivono di seguito inizialmente i principi teorici ed un esempio dei calcoli necessari per la realizzazione di una semplice meridiana di questo tipo. Si completa poi l'argomento riportando le considerazioni teoriche e i calcoli necessari per predisporre le linee orarie di un orologio solare vero e proprio, per chi volesse completare l'opera e dare completo sfogo alle proprie capacità e alla propria creatività artistica.

Fig. 1 Meridiana del Duomo di Acireale (CT). Foto tratta da: https://www.globusmagazine.it/la-meridiana-di-acireale-170-anni-di-storia-e-tante-curiosita/

2 Principi teorici generali

A causa dell'inclinazione dell'asse di rotazione terrestre di circa $23,45°$ rispetto al piano dell'eclittica, l'altezza del Sole sul piano dell'orizzonte varia ciclicamente durante l'anno. Tale variazione angolare prende il nome di declinazione solare (δ) ed è descritta da un

[4] Se la meridiana non è esposta totalmente a Sud perché parte del fronte est o ovest non ha visuale libera si verificherà che per parte delle ore mattutine o pomeridiane essa non proietterà ombra.

andamento sinusoidale compreso tra $+23,45^\circ$ (solstizio d'estate) e $-23,45^\circ$ (solstizio d'inverno), annullandosi agli equinozi ($\delta = 0^\circ$).

L'angolo di inclinazione α formato dai raggi solari con il piano orizzontale al mezzogiorno locale varia in funzione della latitudine del luogo (Lat) secondo la relazione:

- $\alpha_{\text{equinozio}} = 90^\circ - \text{Lat}$
- $\alpha_{\text{massimo}}\ (\text{Solstizio estivo}) = 90^\circ - \text{Lat} + 23{,}45^\circ$
- $\alpha_{\text{minimo}}\ (\text{Solstizio invernale}) = 90^\circ - \text{Lat} - 23{,}45^\circ$

ALLEGATO DIGITALE – Approfondimento di Meccanica Celeste e Perturbazioni Orbitali

La trattazione dei moti secolari di precessione degli equinozi (~ 25.765 anni), della rotazione degli apsidi (spostamento del perielio e dell'afelio), della forma dell'ellissoide terrestre e delle cause gravitazionali della variazione della durata delle stagioni astronomiche è stata omessa dal testo base per ragioni di sintesi ed è consultabile nel Capitolo Integrativo A dell'Allegato Digitale. l'Appendice digitale è accessibile nel sito della Rivista all'indirizzo `https://www.afsu.it/periodici/`

3 Determinazione della lunghezza dell'ombra e parametri locali

Per calcolare la lunghezza dell'ombra proiettata dallo gnomone occorre definire tre parametri fondamentali:

1. Lunghezza dello gnomone h (nell'esempio reale, la barra della ringhiera $h = 87\,\text{cm}$);
2. Latitudine del luogo (Lat);
3. Longitudine del luogo (Long), per determinare l'ora del mezzogiorno vero locale rispetto al fuso orario centrale (15° E).

Tabella 1 - Parametri geografici e inclinazione dei raggi solari per la località d'esempio ($\mathrm{Lat.} = 37{,}7781°$ N, $\mathrm{Long.} = 15{,}1647°$ E)

Parametro Astronomico	**Gradi** (°)	**Primi** (′)	**Secondi** (″)	**Gradi Decimali**
Inclinazione Equinozi ($90° - \mathrm{Lat}$)	52	13	18,8	$52{,}2219°$
Declinazione Solare ($\delta_{\max}$)	23	27	0,0	$23{,}4500°$
$\alpha_{\max}$ (Solstizio Estivo)	75	40	18,8	$75{,}6719°$

Questi pochi dati ci serviranno per calcolare la lunghezza dell'ombra proiettata dallo gnomone giorno per giorno e per poter segnare di conseguenza sul pavimento la posizione, almeno, delle date più importanti lungo il percorso dell'ombra. Oltre ad individuare infatti la posizione di solstizi ed equinozi è possibile indicare alcune altre date o periodo di tempo ritenuti importanti.

È superfluo far notare che l'importanza di leggere sulla meridiana la data del giorno è molto relativa ai giorni nostri perché essa ci viene continuamente ricordata dai numerosi dispositivi elettronici che ci portiamo dietro nonché dai calendari che tutti appendiamo al muro nelle nostre case. Da questo punto di vista anche la realizzazione della stessa meridiana ha poco o nessun senso.

Anticamente però non era così e la meridiana svolgeva anche l'importante ruolo di calendario necessario per la programmazione per tempo delle varie attività umane, come ad esempio quelle dei campi. Realizzare una meridiana oggi ha senso prevalentemente estetico e culturale ed arricchisce, di conseguenza, l'abitazione o il luogo nel quale viene realizzata.

La latitudine ci servirà per calcolare l'inclinazione che hanno i raggi del Sole sul piano dell'orizzonte, inclinazione da cui dipende la lunghezza dell'ombra. La longitudine ci serve invece per sapere quando sarà il mezzogiorno vero locale che non sempre coincide con quello indicato dal nostro orologio in quanto quest'ultimo indica il mezzogiorno del meridiano centrale (meridiano che passa per Monte Mario (RM) e per l'Etna) del fuso n° 1 ad Est di Greenwich.[5]

[5]Ogni fuso orario ha un'ampiezza in longitudine di $15°$ ($360°/24\,\mathrm{h}$). Il meridiano centrale del fuso n° 1 si trova quindi a $15°$ di longitudine Est da Greenwich. Se dunque ci troviamo più ad est del meridiano centrale del nostro fuso la nostra

La precisione delle date segnate dipenderà poi anche dalle condizioni di perfetta ortogonalità tra gnomone e piano del pavimento.[6] Accertare la latitudine del luogo dove realizzare la meridiana è cosa semplicissima. Esistono numerose applicazioni per smartphone in grado di farlo grazie alla localizzazione GPS. In modo facile si ricava anche la longitudine del luogo. Per quanto riguarda il calcolo della lunghezza dell'ombra consideriamo ovviamente il caso teorico di uno gnomone posto ortogonalmente al piano del pavimento. In tali condizioni è possibile eseguire i calcoli necessari utilizzando un foglio di calcolo Excel sul quale sono state impostate le necessarie formule. È possibile anche utilizzare delle macro per velocizzare i calcoli medesimi.

longitudine sarà maggiore di $15°$ Est. Altrimenti sarà inferiore. Nel primo caso il mezzogiorno locale si verificherà prima rispetto al meridiano centrale dato che il moto di rotazione della Terra avviene da ovest verso est e quindi prima delle ore 12 (13 se vige l'ora legale) segnate dal nostro orologio. Nel secondo caso si verificherà invece dopo. Conoscendo la longitudine del luogo conosco anche i minuti di anticipo o ritardo con cui si verificherà il mezzogiorno. Ad esempio, supponiamo di trovarci in una località (ad esempio Tropea, in Calabria) la cui longitudine è $15°53'41{,}24''$ E (est). Visto che la Terra in un'ora ruota verso est di $15°$, allora $53'$ e $41{,}24''$ corrisponderanno a $0{,}8947888°$ e, quindi, a $0{,}8947888°/15°/\mathrm{h} \times 60\,\mathrm{min/h} = 3{,}5792\,\mathrm{min}$ equivalenti a $3\,\mathrm{min}$ e $34{,}7\,\mathrm{s}$. È semplice la conversione da una scala all'altra: $1\,\mathrm{h}$ corrisponde a $15°$, $1\,\mathrm{min}$ corrisponde a $15'$ e $1\,\mathrm{s}$ corrisponde a $15''$. Quindi il mezzogiorno locale avviene $3\,\mathrm{min}$ e $34{,}7\,\mathrm{s}$ prima rispetto a quanto indica l'ora ufficiale segnata dall'orologio. Se la longitudine fosse Ovest anziché Est l'evento del mezzogiorno sarebbe posticipato dello stesso intervallo di tempo.

[6] In verità la situazione reale potrebbe essere differente. Ad esempio, il piano del pavimento potrebbe essere inclinato rispetto alla verticale. Oppure lo gnomone potrebbe essere inclinato rispetto alla verticale, o in direzione dell'ombra o in direzione opposta, di un determinato angolo risultante. O, anche, potrebbero sussistere entrambe le problematiche contemporaneamente. In ogni caso si possono apportare le necessarie correzioni ai calcoli. È consigliabile però accertare prima di realizzare la meridiana l'esistenza o meno di siffatte problematiche e, se possibile, cercare di rimuoverle.

ALLEGATO DIGITALE – Riforma del Calendario Gregoriano e Calcolo Decimale della Durata del Semestre

La spiegazione sui dettagli del divario tra anno civile e anno solare (365,2422 giorni), sulla regola dei secoli bisestili introdotta dalla bolla papale *Inter gravissimas* del 1582 e la relativa tabella analitica sul calcolo decimale dei 178,85 giorni del semestre invernale rispetto ai 186,39 del semestre estivo sono state trasferite nel Capitolo B dell'Allegato Digitale.l'Appendice digitale è accessibile nel sito della Rivista all'indirizzo `https://www.afsu.it/periodici/`

4 Calcolo della declinazione e formula di Cooper

Tenendo conto delle coordinate appena ricordate si può adesso procedere al calcolo della lunghezza dell'ombra. Poiché è difficile tenere conto fedelmente di tutte le piccole variazioni astronomiche annuali che possono influire sulla reale lunghezza dell'ombra proiettata dallo gnomone ci si può limitare a considerare le variazioni giornaliere della declinazione solare così come vengono determinate in maniera approssimata con la seguente formula matematica (Cooper 1969):

$$\delta = 23,45^\circ \operatorname{sen}\left(\frac{360(284+n)}{365}\right)^{7} \tag{1}$$

[7] Calcoli più precisi per la declinazione solare si possono ottenere applicando altre formule che tengono conto di ulteriori parametri astronomici relativi all'orbita apparente del Sole. Una formula utilizzabile è la seguente: $\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\varepsilon \cdot \operatorname{sen} L_v$, con δ = declinazione, ε = obliquità dell'eclittica, L_v = longitudine vera (`https://eratostene.vialattea.net/wpe/algoritmi/coordinate-equatoriali-del-sole/`).
La declinazione può anche essere ricavata dagli sviluppi in serie di Fourier (`https://www.matematicamente.it/staticfiles/approfondimenti/astronomia/LatitudineLongitudine.pdf`).

In essa n corrisponde al numero del giorno dell'anno contati progressivamente dal primo di gennaio ($n = 1$).[8]

Il numero 284 è invece un fattore di adeguamento dei valori della declinazione solare al calendario. Poiché i giorni degli equinozi, nei quali la declinazione è pari a $0°$, corrispondono all'81° e al 264° giorno dell'anno, se si sostituiscono questi valori ad n nella suddetta formula si otterrà, appunto, un valore pressoché nullo della declinazione. In tal modo ponendo $n > 81$ si avranno valori positivi della declinazione che continuerà a crescere raggiungendo il valore massimo nel giorno del solstizio estivo ($+23, 45°$) per poi decrescere nuovamente fino a raggiungere valori negativi quando n supererà il valore di 264.

Utilizzando l'applicativo Excel si può impostare una formula che tenga conto della regola trigonometrica dei triangoli rettangoli nonché dell'andamento sinusoidale della declinazione solare.

ALLEGATO DIGITALE – Codice Macro VBA (Sub CalcoloOmbra) ed Ephemeris Giornaliera a 365 Giorni

Per snellire la lettura dell'articolo, la trascrizione riga per riga del codice VBA della Macro Excel e la Tabella Ephemeris completa, con le lunghezze dell'ombra abbinate antiparallelamente per tutti i 365 giorni dell'anno, sono presenti nel Capitolo C dell'Allegato Digitale.l'Appendice digitale è accessibile nel sito della Rivista all'indirizzo `https://www.afsu.it/periodici/`

5 Criteri geometrici per le linee orarie

Nel caso di uno gnomone inclinato e parallelo all'asse terrestre, le linee orarie per una data ora convergono tutte alla base dello gno-

[8] Il numero n dei giorni trascorsi dal primo di gennaio andrebbe calcolato utilizzando le seguenti formule, dove M indica il numero del mese e D il numero del giorno: $n = \text{int}\left(\frac{275 \cdot M}{9}\right) - 2 \cdot \text{int}\left(\frac{M+9}{12}\right) + D - 30$ per anni ordinari, $n = \text{int}\left(\frac{275 \cdot M}{9}\right) - \text{int}\left(\frac{M+9}{12}\right) + D - 30$ per gli anni bisestili. Nel lavoro qui presentato si vuole appositamente semplificare il processo di calcolo, pertanto il numero dei giorni considerati per n è assunto variare da 1 a 365.

mone e mantengono una direzione costante durante l'anno. Al contrario, per uno gnomone verticale sul piano orizzontale, le linee orarie non convergono nel punto di fissaggio e la direzione dell'ombra varia giorno per giorno all'interno di un piano individuato dal cerchio orario.

Per tracciare la linea oraria di una generica ora (es. le 10:00), è sufficiente calcolare l'azimut e la lunghezza dell'ombra nei due giorni estremi del solstizio invernale ed estivo, unendo i due apici dell'ombra con un segmento rettilineo intersolstiziale.

Se si vuole completare l'opera passando alla realizzazione delle linee orarie nella propria meridiana si descrivono qui di seguito i criteri per il calcolo della lunghezza e l'orientazione delle stesse. Si descrive per prima come procedere col calcolo delle linee orarie di una meridiana orizzontale con stilo parallelo all'asse terrestre per poi passare a parlare di quella con stilo verticale.

In una meridiana orizzontale con stilo parallelo all'asse terrestre la direzione dell'ombra ad una data ora (giorno per giorno) è sempre la stessa, varia solo la lunghezza dell'ombra, in quanto la posizione del Sole sull'orizzonte (fissata l'ora) varia quotidianamente. [9]

Consideriamo la situazione che si verifica alle ore 10,00 del mattino di un giorno del semestre estivo. La distanza in gradi dal mezzogiorno, sull'arco solare giornaliero, corrisponde a $2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$. La posizione del Sole alla stessa ora, nel corso dell'anno, traccia un arco sulla Sfera Celeste che prende il nome di cerchio orario. [10]

Se lo stilo è parallelo all'asse terrestre e ne fa parte, cioè, è contenuto all'interno della retta orientata verso il Polo Nord, allora il cerchio orario di una qualsiasi altra ora della giornata e la suddetta retta assiale sono elementi di un piano. Questo piano conterrà la direzione dei raggi del Sole, tutto lo stilo ed anche tutta la sua ombra che varierà soltanto in lunghezza in base alla posizione del Sole lungo il cerchio orario. Le ombre delle varie ore del giorno convergono tutte nel punto dove viene inserito lo stilo.

[9] Si confronti con: Bibliografia [7].

[10] `https://eratostene.vialattea.net/wpe/glossario/cerchio-orario/`.

Per individuare la direzione dell'ombra per tutte le ore della giornata abbiamo bisogno di conoscere altezza e azimut solari, ora per ora. [11]

Per determinare la lunghezza del segmento delle singole ore dobbiamo riferirci almeno a due punti fondamentali che vengono raggiunti dall'ombra nei giorni del solstizio invernale ed estivo. Ciò può essere fatto conoscendo l'altezza del sole in questi due giorni, che dipende, ovviamente, anche dalla latitudine del luogo.

Determinando anche l'altezza del Sole agli equinozi si potrà disporre di una terza lunghezza che servirà ad individuare sul quadrante la linea degli equinozi. Essa sarà interposta alle iperboli dei due solstizi, una con la concavità rivolta verso la base dello stilo (curva oraria del solstizio estivo) e una con la concavità rivolta in direzione opposta (curva oraria del solstizio invernale).

Per quanto riguarda i calcoli e le indicazioni grafiche per tracciare le linee orarie ci si può affidare alle indicazioni di specifici lavori. [12]

Nel disegno di Fig. 2 (e Fig. 3 dove viene ingrandita la parte centrale) viene comunque illustrato il criterio geometrico per il calcolo della lunghezza dell'ombra in un giorno del semestre estivo.

Lunghezze ed angoli riportati in Fig. 2:

$$\widehat{NOE_2} = \widehat{SOE_1} = \text{Az.} \quad \text{(angoli opposti al vertice)}$$

$$\widehat{CDH} = \widehat{NOE_2} = \text{Az.}$$

(angoli corrispondenti, perché DC è parallelo, per costruzione, a E_2E_1 e tagliato dalla trasversale SN).

[11] L'altezza e l'azimut solare sono coordinate altazimutali che descrivono la posizione del Sole nel cielo. L'altezza è l'angolo verticale che il Sole forma con l'orizzonte (da $0°$ a $90°$). L'azimut è l'angolo orizzontale che misura la direzione del Sole rispetto al punto cardinale Nord, misurato in senso orario (da $0°$ a $360°$).

[12] `https://www.mat.uniroma1.it/sites/default/files/liceomatematico/applicazioniscienze/GREGORIODACATINO-TraCieloETerra-scheda4.pdf`

$\widehat{ACD} = \mathrm{AL}$ (stesso luogo, non varia la latitudine tra O e C)

$$OD = OA \cdot \cos\varphi; \qquad AD = OA \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

essendo φ la latitudine del luogo.

$$DC = \frac{AD}{\tan(\mathrm{AL})}$$

$$OV = \sqrt{OD^2 + DC^2 - 2 \cdot OD \cdot DC \cos(180^\circ - \mathrm{Az.})}$$

(per il teorema di Carnot).

$$\frac{OC}{\operatorname{sen}(180^\circ - \mathrm{Az.})} = \frac{DC}{\operatorname{sen}\left(\widehat{COD}\right)}$$

(per il teorema di Eulero dei seni).

$$\begin{aligned}\widehat{COH} &= \widehat{COD} \\ &= \operatorname{arcsen}\left(\mathrm{Az.} \cdot \frac{DC}{OC}\right)\end{aligned}$$

(sempre per il teorema di Eulero).

Nelle meridiane orizzontali con stilo perpendicolare al piano lo gnomone (ad eccezione della sua punta) non è contenuto nel piano individuato da un cerchio orario e dal diametro dalla Sfera Celeste che punta al Polo Nord. A causa di ciò la direzione dell'ombra, alla stessa ora, cambia di giorno in giorno al variare dell'altezza del Sole sul piano dell'orizzonte.

I raggi solari appartenenti al piano individuato dal cerchio orario contengono lo stilo parallelo all'asse terrestre ma non quello posto lungo la verticale. Quindi, tutti i punti materiali che costituiscono quest'ultimo, proietteranno un'ombra fuori asse rispetto a quella proiettata dallo stilo parallelo all'asse terrestre.

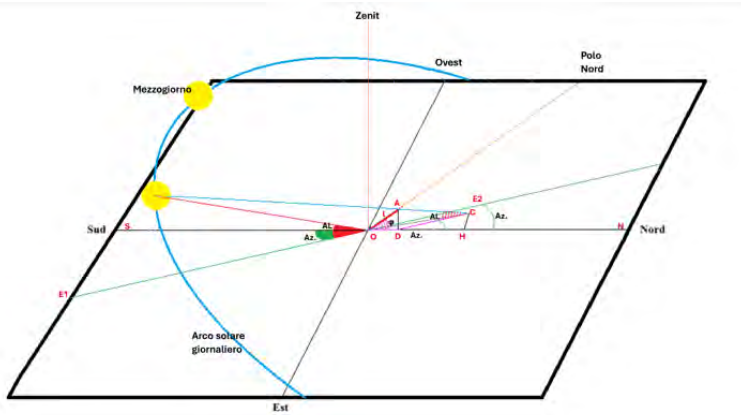


Fig. 2 - Direzione e lunghezza dell'ombra di una meridiana con stilo parallelo all'asse terrestre.

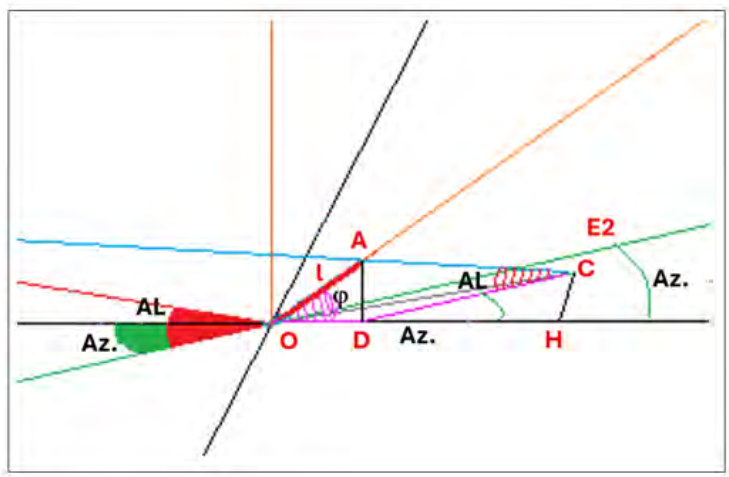


Fig. 3 - Ingrandimento della parte centrale della Fig. 2.

Inoltre, le linee orarie non convergono nel punto nel quale lo stilo è stato infisso. Si può però individuare la direzione della retta oraria e, all'interno di essa, del segmento orario, con estremi gli apici delle ombre proiettate dallo stilo nei due solstizi, usando la tecnica della retta per due punti.

Misurando, cioè, la lunghezza dell'ombra, per la stessa ora del giorno, nelle due date solstiziali di riferimento e segnando sul quadrante l'apice di ciascuna di esse. Si uniscono infine i due estremi segnati sul quadrante ed in tal modo verrà segnata la specifica linea oraria che rappresenta il segmento inter-solstiziale lungo il quale l'ombra dello gnomone cadrà con il suo estremo spostandosi su e giù su di esso durante l'anno.

Per calcolare la lunghezza dell'ombra, come già sopra spiegato, poiché la figura geometrica che si viene a definire tra gnomone verticale, raggio solare e ombra proiettata è un triangolo rettangolo, è possibile applicare la formula:

$$\frac{\text{lunghezza stilo}}{\text{lunghezza ombra}} = \tan(\mathrm{AL})$$

$$\text{lunghezza ombra} = \frac{\text{lunghezza gnomone}}{\tan(\mathrm{AL})}.$$

Nella figura 4 vengono rappresentate le differenti ombre proiettate da due differenti gnomoni. Uno disposto parallelamente all'asse terrestre e l'altro disposto verticalmente rispetto al piano orizzontale. Entrambi considerati, però, inseriti nello stesso punto del quadrante:

$$\overline{BO} = \overline{OA}\ \mathrm{Cot}(\mathrm{AL}) = \frac{\overline{OA}}{\tan(\mathrm{AL})}$$

dove $\overline{BO}$ rappresenta l'ombra dello gnomone verticale.

An_1 = angolo formato dall'ombra proiettata dallo gnomone parallelo all'asse di rotazione terrestre con la direzione Nord-Sud del piano.

An_2 = angolo formato dall'ombra proiettata dallo gnomone verticale con la direzione Nord-Sud del piano.

$\overline{OA}$ = gnomone verticale;

$\overline{OA'}$ = gnomone parallelo all'asse terrestre.

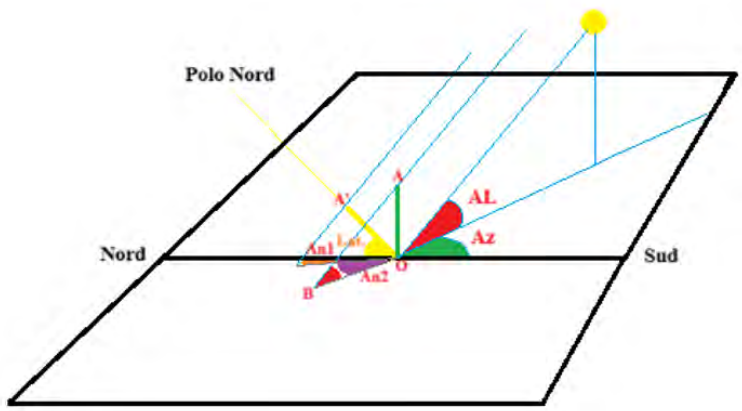


Fig. 4 - Ombre proiettate da due stili dei quali uno verticale al piano orizzontale e l'altro parallelo all'asse terrestre.

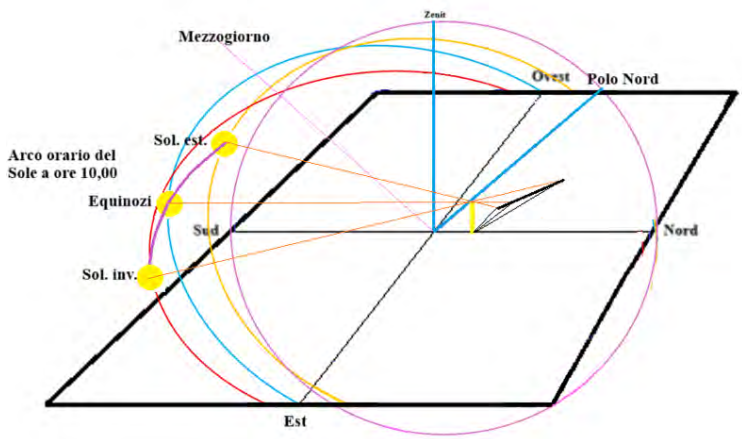


Fig. 5 - Linea oraria ottenuta unendo gli estremi dei segmenti ombra proiettati dallo stilo verticale nei giorni dei solstizi e degli equinozi.

6 Coordinamento delle linee orarie e parametri fondamentali

Nel caso di una meridiana orizzontale con stilo verticale le considerazioni geometriche fatte sopra per la meridiana con stilo paral-

lelo all'asse terrestre si semplificano. Infatti, guardando il disegno di Fig. 6 si può notare che l'angolo $\widehat{CDH}$ che necessita conoscere è uguale all'azimut e l'ombra è lunga:

$$DC = \frac{AD}{\tan(\mathrm{AL})}.$$

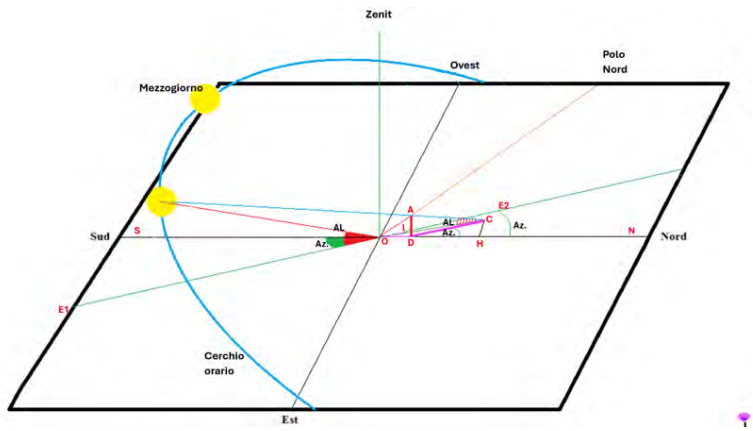


Fig. 6 - Nel caso di una meridiana orizzontale con stilo verticale l'ombra proiettata dallo stilo forma un angolo con la direzione Nord uguale all'azimut.

Conoscendo l'azimut orario la lunghezza dell'ombra dipenderà dall'altezza che il Sole raggiunge sul piano orizzontale, che è, come sappiamo, minima al solstizio invernale e massima al solstizio estivo.

Per poter quindi disegnare le linee orarie di una meridiana orizzontale con stilo verticale è necessario conoscere il valore dell'azimut per ciascuna ora compresa dall'alba a mezzogiorno locale di almeno due giorni dell'anno distanti sufficientemente tra loro (esempio i due solstizi). In tal modo sarà possibile disegnare le ombre proiettate dallo stilo in detti giorni in modo da unirne i loro estremi superiori per ottenere così la relativa linea oraria.

Per quanto riguarda la lunghezza delle ombre è facile determinarla conoscendo, come già chiarito, la lunghezza dello stilo e l'altezza oraria del Sole.

ALLEGATO DIGITALE – Glossario dei Parametri Orbitali Avanzati e Fogli di Lavoro Intermedi

La trattazione teorica dettagliata dei parametri orbitali avanzati – tra cui Tempo Siderale (TSL/TSG), Giorno Giuliano (JD), Secolo Giuliano (T), Anomalia Media e Vera, Equazione del Centro C, Tempo Terrestre (TT), Delta T e parametri delle perturbazioni lunari (longitudine e nodo ascendente della Luna) – unitamente alle Tabelle che riportano i calcoli con 40+ variabili intermedie, è interamente reperibile nel Capitolo D dell'Allegato Digitale.l'Appendice digitale è accessibile nel sito della Rivista all'indirizzo `https://www.afsu.it/periodici/`

Nella tabella 2 vengono raccolti i valori calcolati dell'azimut e della lunghezza dell'ombra delle varie ore antimeridiane nei giorni dei solstizi e dell'equinozio di autunno.

Tabella 2 - Azimut e lunghezza dell'ombra nelle diverse date e ore locali

ORA LOCALE	21/06/2025		22/09/2025		21/12/2025	
	AZIMUT	LUNGHEZZA OMBRA (cm)	AZIMUT	LUNGHEZZA OMBRA (cm)	AZIMUT	LUNGHEZZA OMBRA (cm)
6,00	$70{,}834^\circ$ ($= -19,166^\circ$ da Ovest)	355,4	$-89,061^\circ$ ($= +0,939^\circ$ da Ovest)	3190	$-70,825^\circ$ ($= +19,175^\circ$ da Ovest)	$-355,7604$ (Sole sotto l'orizzonte)
7,00	$78{,}959^\circ$ ($= -11,041^\circ$ da Ovest)	184,95	$-79,672^\circ$ ($= +10,328^\circ$ da Ovest)	366,9	$-62,296^\circ$ ($= +27,704^\circ$ da Ovest)	$-1733,2192$ (Sole sotto l'orizzonte)
8,00	$87{,}325^\circ$ ($= -2,675^\circ$ da Ovest)	115,66	$-69,338^\circ$ ($= +20,662^\circ$ da Ovest)	188,7	$-52,840^\circ$ ($= +37,160^\circ$ da Ovest)	695,7
9,00	$-83,042^\circ$ ($= +6,958^\circ$ da Ovest)	76,2	$-56,997^\circ$ ($= +33,003^\circ$ da Ovest)	122,8	$-41,987^\circ$ ($= +48,013^\circ$ da Ovest)	306,2
10,00	$-69,920^\circ$ ($= +20,080^\circ$ da Ovest)	49,6	$-41,275^\circ$ ($= +48,725^\circ$ da Ovest)	89,2	$-29,384^\circ$ ($= +60,616^\circ$ da Ovest)	207,1
11,00	$-47,116^\circ$ ($= +42,884^\circ$ da Est)	30,8	$-20,968^\circ$ ($= +69,032^\circ$ da Ovest)	71,9	$-15,026^\circ$ ($= +74,974^\circ$ da Ovest)	168,7

I dati della tabella precedente (Tabella 2) possono essere utili per realizzare, utilizzando un software di grafica specifico, il disegno, in scala di pixel, delle linee orarie della nostra meridiana. Il disegno della figura seguente è stato realizzato con il software Gimp (scaricabile da internet) e potrebbe essere valido per una meridiana come quella descritta finora con uno gnomone lungo 87 cm e con visuale perfettamente libera da est a ovest.

Va precisato che i dati raccolti nella Tabella 2, sebbene riferiti alle sole ore antimeridiane, bastano anche per tracciare le linee orarie pomeridiane. Infatti, queste ultime sono simmetriche rispetto alla linea oraria del mezzogiorno. Il loro disegno diventa pertanto un pro-

blema facilmente risolvibile e in modo rapido con il software grafico utilizzato.

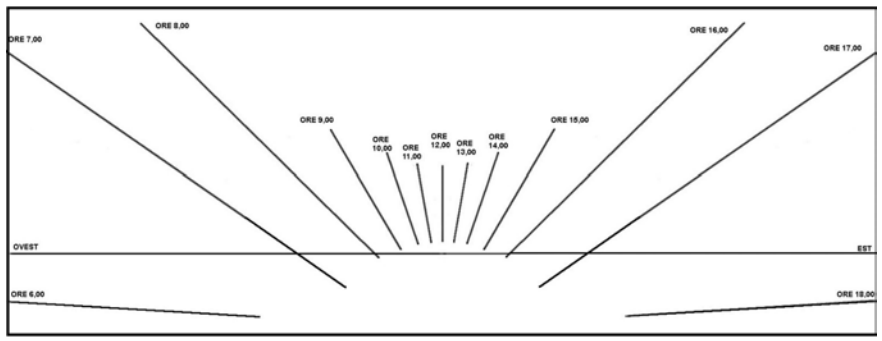


Fig. 7 - Linee orarie realizzate utilizzando i valori dell'azimut, dalla direzione Est-Ovest, e della lunghezza dell'ombra dello gnomone riportate nella tabella 2. Per ogni linea oraria l'estremo inferiore rappresenta l'apice dell'ombra dello stilo nel giorno del solstizio estivo, mentre l'estremo superiore rappresenta l'apice dell'ombra durante il solstizio invernale. Le linee orarie pomeridiane sono simmetriche rispetto a quelle antimeridiane. Esse si ottengono ribaltando, in figura (tramite software), di $180°$ le linee orarie da sinistra (antimeridiane) a destra rispetto alla linea oraria di mezzogiorno. Le linee orarie delle ore 6,00 e 18,00 sono in genere meno utilizzabili perché l'ombra dello gnomone può raggiungerle solo nel semestre primavera-estate.

7 Realizzazione pratica e soluzioni reversibili

Nell'ipotesi si voglia, e sia possibile, realizzare anche le linee orarie nella nostra meridiana si può procedere stampando, anche su un foglio A4 (o un formato più grande) le linee orarie disegnate al computer. Successivamente si può fissare con della colla, o con dello scotch, il foglio sulla superficie che dovrà diventare una meridiana orientando il foglio stesso con la linea oraria delle ore 12,00 che punta a Nord. La direzione del Nord deve essere stata individuata

prima e con una certa precisione segnandola già sulla superficie in questione.[13]

In tal modo sarà possibile individuare e segnare anche la direzione Est-Ovest (essendo ortogonale alla prima). Dopo aver fatto queste operazioni preliminari si può procedere con una riga ed una matita a prolungare, sul futuro quadrante, le linee orarie stampate sul foglio secondo la lunghezza in centimetri che dovranno avere. Bucando con la punta della matita il foglio di carta in corrispondenza degli

[13]La direzione Nord-Sud può essere determinata in vari modi. Alcuni poco precisi. Un metodo piuttosto preciso è quello che prevede, una volta conosciuta la esatta longitudine del luogo, di utilizzare un orologio che segni l'ora locale che corrisponde all'ora di Greenwich + longitudine del luogo espressa in ore, minuti e secondi. Si cerca su internet (`https://time.is/it/Greenwich_United_Kingdom`) l'ora di Greenwich in un determinato momento e la si confronta con quella segnata dal proprio orologio che dovrebbe essere esattamente un'ora avanti (se è stato regolato bene) in quanto segna l'ora del meridiano centrale del fuso 1 che si trova a 15° di longitudine Est da Greenwich. Si trasformano i gradi e i decimali della longitudine del luogo che risultano essere in più o in meno rispetto ai 15° del meridiano centrale in minuti e secondi e si aggiungono (se la longitudine supera i 15°) o si sottraggono (se la longitudine è inferiore a 15°) al valore orario segnato dal nostro orologio. Una volta fatto ciò il nostro orologio segnerà l'ora locale e quando sarà mezzogiorno esatto basterà segnare sul piano di riferimento il punto estremo dove cade l'ombra. Il segmento che unisce il punto in cui è inserito lo gnomone e il punto in cui è arrivata la sua ombra indicherà la direzione Nord-Sud. Ci sono poi altri metodi meno precisi come, ad esempio, quello dei cerchi indù. Esso prevede di tracciare cerchi concentrici su una superficie piana e fissare un'asta verticale (gnomone) al centro. Segnando due punti su ogni cerchio in cui cade l'ombra dello gnomone in momenti diversi (uno prima di mezzogiorno e uno dopo), e unendo questi punti con un segmento, la linea che passa per il centro e il punto medio di questo segmento sarà la linea meridiana (nord-sud). In alternativa è possibile segnare l'estremo superiore dell'ombra proiettata dallo gnomone, già fissato nel punto in cui realizzare l'orologio solare, in un intervallo temporale a cavallo del mezzogiorno locale. Si possono segnare in tal modo vari segmenti delimitati dai punti segnati e dal punto in cui è stato fissato lo gnomone. Il segmento più corto tra essi indicherà la direzione Nord-Sud. Per ridurre l'errore angolare (tra la direzione Nord-Sud vera e quella indicata dal segmento prescelto) bisogna però segnare numerosi punti, praticamente accostati gli uni agli altri, e misurare con attenzione la lunghezza dei relativi segmenti.

estremi inferiori delle linee orarie sopra di esso stampate si potranno segnare tali estremi sulla superficie del futuro quadrante. In tal modo le linee orarie appena segnate potranno essere prolungate (una volta tolto il foglio) in direzione opposta fino a questi punti per essere così completate nella loro lunghezza. Una volta riprodotto il disegno delle linee orarie sulla superficie prescelta si può passare alla fase di costruzione della stessa. Ci sono molti metodi e mezzi da poter utilizzare per la costruzione di una meridiana e si tratta quindi di una scelta personale, oltreché artistica. Quindi bisogna lasciare totale libertà di decisione. Se comunque si volesse realizzare una meridiana semplice come quella proposta, costituita dalla sola linea oraria del mezzogiorno, la spesa da sostenere potrebbe essere davvero minimale. Quindi, il principio di economicità e semplicità di realizzazione potrebbe suggerire, ad esempio, se il quadrante fosse direttamente il pavimento, l'utilizzo di una striscia adesiva di colore chiaro e di lunghezza pari a quella dell'intera linea meridiana. A tal fine è utile sapere che esistono in commercio dei nastri butilici sigillanti in grado di aderire saldamente alla superficie di fissaggio e di essere perfettamente impermeabili. Tali nastri adesivi non si staccano facilmente e resistono anche al calore. In commercio se ne trovano di tanti tipi acquistabili, davvero, con pochi euro. Inoltre, qualora si decidesse, in un secondo momento, di rimuovere il nastro è sempre possibile farlo e la sostanza adesiva di cui è impregnato può essere opportunamente rimossa dalla superficie di adesione utilizzando dei comuni solventi. Bisogna quindi far aderire il nastro butilico, lungo la sua linea mediana, sulla linea del mezzogiorno già tracciata sul pavimento. Dopo aver incollato la striscia bisogna segnare su di essa, alla specifica distanza, le varie date dell'anno, almeno quelle principali ed altre ancora ritenute importanti. Non possono mancare ad esempio le date dei solstizi e degli equinozi (queste ultime coincidenti in un unico punto), i nomi dei segni zodiacali, ed altro ancora. È chiaro che, guardando la striscia in direzione Nord, su di un bordo (ad esempio sinistro) verranno indicati i mesi invernali-primaverili e sull'altro quelli estivo-autunnali. Per segnare le date principali è possibile utilizzare delle letterine (e numeri) adesive che si possono appiccicare direttamente sul nastro (per comodità di realizzazione

non inferiore a 5 cm di larghezza). Con esse formare dunque le date ritenute importanti ed altri eventi. Bisognerà anche valutare la dimensione che esse dovranno avere.[14]

Composte le date e dopo aver controllato che tutto sia apposto si può far aderire lungo la linea mediana del nastro butilico una striscia di nastro adesivo sottile ($\varnothing = 5$ mm) del colore desiderato (vedi Figura 8). Esso ha la funzione di segnare con maggior precisione il momento del mezzogiorno locale. Si consiglia di fare almeno una prova di tutto il processo, magari su di un pezzo di cartone prima di operare sulla linea meridiana (vedi Figura 8).[15]

Dopo aver fissato tutte le lettere delle varie date è opportuno spennellare su tutto il nastro butilico della resina poliestere attivata con il suo specifico catalizzatore.[16] Ciò impedirà che le lettere possano staccarsi o essere danneggiate nel tempo dagli agenti atmosferici. Per evitare sbavature di resina oltre il nastro butilico si consiglia di cingere i suoi bordi con del normale nastro adesivo, da rimuovere poi una volta che la resina si sarà asciugata e indurita.

In alternativa al nastro butilico è sempre possibile utilizzare specifiche vernici e/o resine ma il loro utilizzo non prevede poi una facile eventuale rimozione. Se si decide di utilizzare delle specifiche vernici si può allora procedere nel seguente modo. Si delimiti la linea meridiana, precedentemente segnata sul quadrante della meridiana,[17] con del nastro adesivo di una certa larghezza, selezionando in tal modo una superficie rettangolare regolare lunga quanto tutta la linea meridiana e della larghezza desiderata. Su tale superficie rettangolare ben pulita si potrà spruzzare una vernice di fondo scelta di un colore che crei un adeguato contrasto con una seconda vernice di

[14] Si potrà decidere così quale formato di lettere utilizzare e come sia più conveniente disporle. L'esempio fornito nella foto di Fig. 8 rappresenta solo una ipotetica scelta.

[15] È possibile acquistarla facilmente nei negozi di ferramenta o di vernici.

[16] La superficie di realizzazione della meridiana può semplicemente essere il pavimento o un qualsiasi piano poggiato su di esso.

[17] La superficie di realizzazione della meridiana può semplicemente essere il pavimento o un qualsiasi piano poggiato su di esso.

copertura da usare in un secondo momento.[18]

Lungo tale fascia rettangolare così evidenziata si faranno poi aderire, alla specifica distanza tra di loro, le letterine adesive ed i numeri sopra ricordati. Dopo aver ben controllato la loro corretta posizione, dedotta dai calcoli della lunghezza dell'ombra nei vari giorni dell'anno, si potrà spruzzare la vernice di copertura. Quando quest'ultima sarà asciutta si potranno togliere le lettere e i numeri precedentemente fatti aderire. In tal modo le date e tutte le ulteriori informazioni scritte saranno leggibili chiaramente.

Fig. 8 - A sinistra: Nastro butilico bianco e letterine adesive nere con le quali poter realizzare la linea oraria del mezzogiorno di una semplice meridiana orizzontale con stilo verticale. Al centro: nastri adesivi di vario colore (larghezza 5 mm) e prova di adesione su cartone del nastro butilico con lettere (in maiuscolo e minuscolo), numeri e linea mediana. A destra: Latta di vetroresina poliestere da spennellare a lavoro finito su tutta la striscia di nastro butilico.

8 Conclusioni

Come chiarito in premessa lo scopo di quanto relazionato è sostanzialmente quello di offrire un suggerimento per realizzare una

[18] Ad esempio, bianca, gialla o rossa per una vernice di copertura nera, oppure al contrario, nera per una vernice di copertura bianca, gialla o rossa.

meridiana semplificata con l'intento di incoraggiare qualche lettore ad iniziare ad interessarsi all'Astronomia ed alla Gnomonica in particolare. Gli eventuali aggiuntivi interessi artistici che si possono avere per la realizzazione di siffatte opere possono solo coadiuvare nel raggiungere tale fine. Se poi si temesse per la complessità dei calcoli allora la semplificazione proposta, consistente nel limitarsi a calcolare solo la lunghezza dell'ombra dello gnomone a mezzogiorno, potrebbe risolvere il problema. Le tecniche di costruzione suggerite, che puntano alla semplificazione operativa e alla economicità di spesa, non possono certamente considerarsi ottimali e pregevoli ma potrebbero far decidere il lettore incuriosito ad iniziare un progetto per la realizzazione di una prima meridiana pro tempore. Magari dopo l'incipit suggerito si vorrà passare a realizzare un'opera completa e artisticamente pregevole, dopo aver meglio compreso come gestire le difficoltà tecniche ed aver imparato a saper fare i calcoli relativi. Ci si augura quindi che il presente lavoro possa servire da stimolo per tutti coloro ai quali piacerebbe fare qualcosa di particolare ma non osano ancora per le possibili difficoltà da dover superare.

9 Bibliografia

1. Bernieri A. (s.d.). *Coordinate*. Disponibile al link: `http://webusers.fis.uniroma3.it/bernieri/pdf/Coordinate.pdf`

2. Bernieri A. (s.d.). *Coordinate – presentazione*. Disponibile al link: `http://webusers.fis.uniroma3.it/bernieri/pdf/Coordinate_ppt_1.pdf`

3. Angeletti A. (s.d.). *Sistemi di riferimento astronomici e trasformazioni di coordinate*. Disponibile al link: `http://www.angeloangeletti.it/ASTRO_UNICAM/2020/01%20-%20SISTEMI%20DI%20RIFERIMENTO%20ASTRONOMICI%20E%20TRASFORMAZIONI%20DI%20COORDINATEx.pdf`

4. IK0DWJ (s.d.). *Meccanica celeste*. Disponibile al link: `https://www.ik0dwj.it/shack/satelliti/meccanica-celeste/`

5. Matematicamente.it (s.d.). *Tempo siderale*. Disponibile al link: `https://www.matematicamente.it/staticfiles/approfondimenti/astronomia/TempoSiderale.pdf`

6. Matematicamente.it (s.d.). *Latitudine e longitudine*. Disponibile al link: `https://www.matematicamente.it/staticfiles/approfondimenti/astronomia/LatitudineLongitudine.pdf`

7. Matematicamente.it (s.d.). *Meridiane solari*. Disponibile al link: `https://www.matematicamente.it/staticfiles/approfondimenti/astronomia/meridiane_solari.pdf`

8. INAF – Osservatorio Astrofisico di Trieste (s.d.). *Coordinate*. Disponibile al link: `https://www.oats.inaf.it/images/files/coordinate.pdf`

9. Karttunen H., Oja H., Kroger P. (2023). *Fondamenti di astronomia*. Novara: UTET Università.

10. Matricciani Emilio (2017). *Meccanica celeste e orbite dei satelliti*. Bologna: Esculapio Edizioni.

Relazione tra media aritmetica e media quadratica

Pietro Velonà*

DOI:10.53159/PdM(V).v1n2.175

Ricevuto 6-09-2026 Accettato 12-09-2026 Pubblicato 30-09-2026

Abstract: *The present work proposes a demonstration of the relationship between the arithmetic mean and the quadratic mean. By applying the principle of induction, a path is followed that allows the set goal to be achieved. In this way, we want to reflect on the fact that we do not slavishly accept formulas and relationships present in school books, but always try to bring them back to a demonstrative process that enhances their meaning.*

Keywords: Arithmetic mean; quadratic mean

Sommario: *Il presente lavoro propone una dimostrazione della relazione tra la media aritmetica e quella quadratica. Applicando il principio di induzione, si percorre una strada che consente di raggiungere l'obiettivo prefissato. Si vuole, in tal modo, riflettere sul fatto di non accettare pedissequamente formule e relazioni presenti nei libri di scuola, ma cercare sempre di ricondurle ad un processo dimostrativo che ne valorizzi il significato.*

Parole chiave: media aritmetica, media quadratica

*IIS Mazzone, Roccella Jonica, Italia; velomapi@libero.it

1 Introduzione

È vero, è proprio tutta una questione di medie. «Prof, ma se vengo all'interrogazione e non sono sufficientemente preparato, mi rovino la media!». È un grido di difesa da parte degli alunni che, ogni giorno, rimbomba nelle aule. Sentiamo spesso frasi come queste, come sfogo dei nostri studenti. Secondo la loro visione, sembra che tutto debba girare attorno alle medie e che un voto numerico sia più importante di una consapevole preparazione.

L'obiettivo di questo lavoro è di entrare nel mondo di questi temuti indicatori matematici, non per una trattazione sistematica (si veda, ad esempio, Vajani, 1978), ma per creare un'occasione di riflessione che trasmetta l'interesse per la ricerca della conoscenza. Prendendo spunto da un'attività svolta in classe, viene proposta la dimostrazione di una relazione tra due particolari medie: quella aritmetica e quella quadratica.

In una delle lezioni di fisica, che riguarda lo studio della Termodinamica, affronto solitamente la differenza tra l'approccio macroscopico e quello microscopico (Amaldi, 2025). Con quest'ultimo si può, ad esempio, spiegare il significato fisico della temperatura, riconducendolo alla relazione che questa grandezza ha con l'energia media delle particelle di un gas. L'elemento da sottolineare, quando si parla di approccio microscopico, è l'uso della statistica, avendo a che fare con un sistema costituito da molte particelle. Si parte dalla definizione di energia cinetica media, come media aritmetica delle energie cinetiche delle singole particelle, per arrivare alla classica relazione del semiprodotto della massa per il quadrato di una velocità. Quest'ultima è la velocità quadratica media, cioè la radice quadrata della media aritmetica dei quadrati delle velocità. È la prima volta che gli studenti incontrano una media quadratica!

Ho ricordato il mio percorso universitario, quando, nel trattare le medie, ho studiato la media aritmetica, geometrica, armonica e quadratica e, soprattutto, la relazione che esiste tra questi indicatori statistici. Mi sono messo a consultare i miei appunti poiché desideravo andare al cuore del problema e ritrovare la dimostrazione secondo cui la media quadratica è maggiore o uguale della media aritmeti-

ca. Dopo varie consultazioni, ho trovato sempre le solite diciture: si rimanda ad un autore per la dimostrazione, oppure si utilizza la disuguaglianza di Jensen (`https://mate.unipv.it/gilardi/WEBGG/PSPDF/ind-dis.pdf`).

Mi sono trovato come il protagonista del film "Fantozzi va in pensione". Egli, non resistendo a stare troppo lontano dal lavoro, partecipa ad un concorso, sotto una falsa identità. Di fronte ad un problema di alta ragioneria, per la cui risoluzione occorre utilizzare il computer, prova in tutti i modi ad avvicinarsi agli altri candidati per avere un'imbeccata, ma purtroppo non ottiene il gesto di solidarietà desiderato. Ad un certo punto, tira fuori matita e taccuino dalla tasca della giacca e si mette a ragionare, traendo dal cilindro delle sue conoscenze ed esperienze, metodi di calcolo e strategie per poter arrivare al risultato finale. E ci riesce!

Con tanta pazienza, ho preso anch'io carta e penna e ho cercato di organizzare alcune idee che mi conducessero alla dimostrazione della disuguaglianza tra le due medie.

2 Dimostrazione per induzione

Indichiamo con X una grandezza e con x_1, x_2,....x_N i valori assunti da X in N osservazioni. Possiamo affermare che la media aritmetica, $\bar{x}$, dei valori osservati è data da:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N},$$

mentre la media quadratica, $\langle x \rangle$, è espressa dalla seguente relazione:

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}}.$$

Vogliamo dimostrare che la media quadratica è maggiore o uguale della media aritmetica:

$$\langle x \rangle \geq \bar{x}. \tag{1}$$

Distinguiamo due casi.

Caso 1

Supponiamo che tutte le x_i siano uguali ad una valore x. Allora, dalle due definizioni introdotte prima, si ha:

$$\bar{x} = \frac{\cancel{N}x}{\cancel{N}} = x,$$

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\cancel{N}x^2}{\cancel{N}}} = x.$$

Pertanto la (1) è soddisfatta con il segno di uguaglianza.

Caso 2

Supponiamo che le x_i non siano tutte uguali ad uno stesso valore e procediamo per induzione (Bergamini, Barozzi, Trifone, 2025).

Sia $N = 2$. Consideriamo il quadrato della differenza tra le due osservazioni x_1 e x_2; possiamo affermare che esso è strettamente maggiore di zero poiché x_1 e x_2 sono diversi tra loro. Sviluppiamo la disuguaglianza:

$$(x_1 - x_2)^2 > 0,$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 > 0.$$

Sommiamo ad ambo i membri la somma dei quadrati di x_1 e x_2:

$$2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 > x_1^2 + x_2^2,$$

$$2\left(x_1^2 + x_2^2\right) > x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2,$$

$$2\left(x_1^2 + x_2^2\right) > (x_1 + x_2)^2,$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} > \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2,$$

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} > \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Quindi, per $N = 2$, la (1) è soddisfatta con il segno di disuguaglianza. Per l'ipotesi di induzione, supponiamo che sia vera con lo stesso segno per $N - 1$:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2}{N-1}} > \frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_i}{N-1}.$$

Dimostriamola per N. Sviluppiamo il quadrato della media quadratica:

$$\langle x\rangle^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2}{N} + \frac{x_N^2}{N} =$$

$$= \frac{N-1}{N} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2}{N-1} + \frac{x_N^2}{N}.$$

Applichiamo l'ipotesi d'induzione:

$$\langle x\rangle^2 = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2}{N-1} + \frac{x_N^2}{N} > \frac{\cancel{N-1}}{N} \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i\right)^2}{(N-1)^{\cancel{2}}} + \frac{x_N^2}{N} =$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i\right)^2}{(N-1)} + \frac{x_N^2}{N} \longrightarrow$$

$$\langle x\rangle^2 > \frac{N}{N-1} \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i\right)^2}{N^2} + N\frac{x_N^2}{N^2}. \tag{2}$$

Poniamo:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_i}{N},\ B = \frac{x_N}{N}. \tag{3}$$

Sostituendo le (3) nella (2), si ha:

$$\langle x\rangle^2 > \frac{N}{N-1}A^2 + NB^2.$$

Al secondo membro sommiamo e sottraiamo il quadrato della somma di A e B (si riportano tutti i passaggi, affinché il solerte lettore possa confrontare il proprio svolgimento):

$$\langle x\rangle^2 > \frac{N}{N-1}A^2 + NB^2 - (A+B)^2 + (A+B)^2 =$$

$$= \frac{NA^2 + N^2B^2 - NB^2 - (N-1)(A+B)^2}{N-1} + (A+B)^2 =$$

$$= \frac{\cancel{NA^2} + N^2B^2 - NB^2 - \cancel{NA^2} - NB^2 - 2NAB}{N-1} +$$

$$+ \frac{A^2 + B^2 + 2AB}{N-1} + (A+B)^2 =$$

$$= \frac{A^2 + N^2B^2 - 2NB^2 + B^2 - 2NAB + 2AB}{N-1} + (A+B)^2 =$$

$$= \frac{A^2 + (N^2 - 2N + 1)B^2 - 2(N-1)AB}{N-1} + (A+B)^2 =$$

$$= \frac{A^2 + (N-1)^2B^2 - 2(N-1)AB}{N-1} + (A+B)^2 =$$

$$= \frac{(A - (N-1)B)^2}{N-1} + (A+B)^2 .$$

Vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$\langle x \rangle^2 > \frac{(A - (N-1)B)^2}{N-1} + (A+B)^2 \geq (A+B)^2 , \qquad (4)$$

da cui, essendo la quantità $\dfrac{(A - (N-1)B)^2}{N-1}$ maggiore o uguale a zero, si ha:

$$\langle x \rangle^2 > (A+B)^2 . \qquad (5)$$

Tenendo conto delle (3), il secondo membro della (5) è il quadrato della media aritmetica:

$$(A+B)^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_i}{N} + \frac{x_N}{N} \right)^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \right)^2 = \bar{x}^2 .$$

Tornando alla (5), risulta dimostrata la (1) con il segno di disuguaglianza.

Pertanto, per $N \geq 2$, si ha che:

- se tutte le x_i non sono uguali ad uno stesso valore, la (1) risulta soddisfatta con il segno di disuguaglianza;

- se tutte le x_i sono uguali, la (1) risulta soddisfatta con il segno di uguaglianza.

Un'osservazione

Se poniamo l'espressione $(A - (N-1)\,B)$ uguale a zero, si ottiene:

$$A - (N-1)B = 0 \;\longrightarrow\; A + B = NB.$$

Sostituendo le (3), si deduce:

$$\bar{x} = x_N.$$

Possiamo affermare che, se la media aritmetica è uguale ad uno dei valori osservati, allora la seconda disuguaglianza presente nella (4) vale con il segno di uguale.

3 Conclusioni

Nel presente articolo è dimostrata la relazione che intercorre tra la media aritmetica e quella quadratica.

Lo svolgimento di una lezione in classe, riguardante l'approccio microscopico in Termodinamica, diventa lo spunto per sedersi a tavolino e inventare una strategia di calcolo che porti al risultato desiderato.

Il lavoro rappresenta, in tal modo, un'occasione di riflessione sulla necessità di non accettare passivamente equazioni e relazioni presenti nei testi di riferimento, ma chiedersi sempre quali possano essere i processi attraverso i quali esse sono ottenute.

Per finire, un simpatico dubbio: chissà se, dopo la lettura di questo lavoro, la richiesta degli alunni, nella valutazione delle loro prove, sarà di utilizzare la media quadratica, anziché quella aritmetica! (Fig. 1).

Fig. 1 Strane valutazioni.

4 Ringraziamenti

Ringrazio la prof.ssa Carmen Petronio, docente di Matematica e Fisica presso il Liceo Volta di Reggio Calabria, che ha disegnato l'immagine presente nella figura 1, contribuendo con la sua creazione a fornire al lavoro un tocco di simpatica originalità.

5 Bibliografia

1. Amaldi U. (2025). *L'Amaldi.blu. Meccanica e Termodinamica*, volume 1, quarta edizione. Bologna: Zanichelli.

2. Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. (2025). *Matematica.blu 2.0*, volume 5, quarta edizione. Bologna: Zanichelli.

3. Vajani L. (1978). *Statistica descrittiva*. Milano: ETAS.

4. `https://mate.unipv.it/gilardi/WEBGG/PSPDF/ind-dis.pdf` (ultimo accesso: agosto 2026).

Metamorfosi di una formula
Riflessioni sulla formula di Faulhaber e sui suoi mutamenti

Giorgio Pietrocola*

DOI:10.53159/PdM(V).v1n2.176

Ricevuto 29-09-2026 Accettato 29-09-2026 Pubblicato 30-09-2026

Abstract: *The so-called Faulhaber formula, which solves the classic problem of adding powers of successive integers, is examined, from its origins to its subsequent transformations, from both a historical and educational perspective. Modern formulas using matrices are also presented, including an original teaching proposal based on the author's research.*

Keywords: Faulhaber's formula; Bernoulli numbers; Pascal matrices

Sommario: *Viene esaminata la cosiddetta formula di Faulhaber, che risolve il classico problema della somma di potenze di interi successivi, dalla sua nascita alle sue successive trasformazioni sotto*

*APAV, Teramo; giorgio.pietrocola@gmail.com

il profilo sia storico che didattico. Vengono anche presentate formule moderne che utilizzano le matrici tra cui una proposta didattica originale nata dalle ricerche dell'autore.

Parole chiave: Formula di Faulhaber; Numeri di Bernoulli; Matrici binomiali

1 Introduzione

1.1 Questioni filosofiche

Una formula che muta nel tempo?
Allora il platonismo matematico, quella teoria filosofica che trova ancora molti adepti tra i matematici odierni, quella teoria per cui gli oggetti matematici esistono indipendentemente dagli esseri umani, senza essere soggetti all'ingiuria del tempo, viene confutata? Dunque non è vero che quelle dei matematici siano delle scoperte al pari di quelle di altri scienziati che esplorano il nostro mondo fisico. Vengono confermate invece teorie filosofiche , come il formalismo, secondo cui la matematica è un linguaggio creato dagli esseri umani in cui si inventano simboli, definizioni e regole e poi si esplorano le conseguenze logiche di quelle regole!

No, no, non è questo lo scopo di questo articolo. Credo comunque che le due visioni filosofiche mostrino due facce della stessa medaglia. Nessuna confutazione, una formula non è un oggetto matematico, ma piuttosto un nostro modo per indicare quell'oggetto che è, solo lui, una realtà immutabile. Quindi la formula è una nostra ingegnosa costruzione, un'invenzione che può essere cambiata e migliorata nel tempo per meglio esprimere i concetti retrostanti. Per questo imparare a memoria una formula può funzionare per superare un esame, ma non garantisce una comprensione significativa. Senza un coinvolgimento attivo e consapevole il rischio è di fermarsi al dito indicante senza vedere la luna.

1.2 2025: un anno esemplare

A quale problema si riferisce questa formula? Cosa risolve?

Il problema è quello della corrispondenza tra somme di potenze di numeri interi successivi e particolari polinomi che ne calcolano il risultato. Prendiamo, come esempio, un fatto curioso. L'anno da poco trascorso, il 2025, ha questa doppia particolarità:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = 2025$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2 = 45^2 = 2025$$

La somma dei primi nove interi positivi ognuno elevato al cubo è uguale al quadrato della somma dei primi nove interi successivi. Qui entrano in gioco due particolari somme di potenze di interi successivi composte da 9 addendi. Quella con esponente 3 e quella con esponente 1 (normalmente sottinteso). Per entrambe queste somme, come i matematici sanno sin dall'antichità, esistono polinomi che, in funzione del numero di addendi n, ne calcolano il risultato:

$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

Elementari conoscenze algebriche permettono di riconoscere nel trinomio di quarto grado il quadrato del binomio di secondo. Ponendo $n = 9$ abbiamo

$$\sum_{k=1}^{9} k^1 = 45 \quad e \quad \sum_{k=1}^{9} k^3 = 2025$$

Un evento simile tra circa mille anni ($\sum_{k=1}^{10} k^3 = 3025$) con 10 addendi. Con otto è già accaduto ai tempi di Dante ($\sum_{k=1}^{8} k^3 = 1296$) e con sette ai tempi di Carlo Magno ($\sum_{k=1}^{7} k^3 = 784$). Sostituendo n con i numeri interi, iniziando da uno, si ottiene:

$\sum_{k=1}^{1} k^3 = \frac{1}{4}1^4 + \frac{1}{2}1^3 + \frac{1}{4}1^2 = 1 = (\sum_{k=1}^{1} k^1)^2 = (\frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}1+)^2 = 1^2$

$\sum_{k=1}^{2} k^3 = \frac{1}{4}2^4 + \frac{1}{2}2^3 + \frac{1}{4}2^2 = 9 = (\sum_{k=1}^{2} k^1)^2 = (\frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{2}2)^2 = 3^2$
$\sum_{k=1}^{3} k^3 = \frac{1}{4}3^4 + \frac{1}{2}3^3 + \frac{1}{4}3^2 = 36 = (\sum_{k=1}^{3} k^4)^2 = (\frac{1}{2}3^2 + \frac{1}{2}3)^2 = 6^2$
$\sum_{k=1}^{4} k^3 = \frac{1}{4}4^4 + \frac{1}{2}4^3 + \frac{1}{4}4^2 = 100 = (\sum_{k=1}^{4} k^1)^2 = (\frac{1}{2}4^2 + \frac{1}{2}4)^2 = 10^2$ etc.

2 La nascita della formula

I matematici sin dall'antichità, come capitò anche a me all'inizio della mia carriera di insegnante, si accorsero di una strana corrispondenza tra somme di potenze di interi auccessivi, elevati a uno stesso esponente, intero non negativo, e polinomi in una variabile che, coincidendo con il numero di addendi sommati, calcolano proprio il risultato di quella somma. Gli interi successivi $1, 2, 3...$ sono una particolare progressione aritmetica. Non tratteremo della lunga storia che attraverso i secoli ha visto coinvolti molti matematici, anche illustri come Archimede e Pascal (Beery,2010). La formula di Faulhaber, nonostante il nome, non è stata partorita dalla mente di Jhoan Faulhaber (1580-1635), ma da quella di Jacob Bernoulli (1654-1705). Fu presentata postuma alla comunità dei matematici occidentali (Bernoulli,1713) nel trattato, scritto in latino, "Ars conjectandi" nella pagina mostrata in Figura 1 Per prima cosa dobbiamo tradurla secondo le odierne convenzioni algebriche. Essa diventa così:

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2!}B_2 n^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{4!}B_4 n^{c-3} + \\ + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{6!}B_6 n^{c-5} + \\ + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)(c-5)(c-6)}{8!}B_8 n^{c-7} + \dots \quad (1)$$

Il simbolo $\int$, una esse deformata iniziale di somma, che oggi usiamo per gli integrali, somme di infiniti addendi, è stata sostituita dal più modermo simbolo di sommatoria con indice k, variabile come specificato, atto a descrivere, al suo variare, i vari addendi

... Atque si porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet :

Summae Potestatum

$\int n = \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$
$\int nn = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$
$\int n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn$
$\int n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$
$\int n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}nn$
$\int n^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$
$\int n^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}nn$
$\int n^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$
$\int n^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{12}nn$
$\int n^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentuis ensperexit, eundem etiam continuare poterit absque his ratiociniorum ambabimus : Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\int n^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c\cdot c-1\cdot c-2}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{c-3}$$
$$+\frac{c\cdot c-1\cdot c-2\cdot c-3\cdot c-4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}Cn^{c-5}$$
$$+\frac{c\cdot c-1\cdot c-2\cdot c-3\cdot c-4\cdot c-5\cdot c-6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}Dn^{c-7}\cdots$$

& ita deinceps, exponentem potestatis ipsius n continué minuendo binario, quosque perveniatur ad n vel nn. Literae capitales A, B, C, D & c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$, & c. nempe

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}.$$

Fig.1 - Pag.76 di Ars conjectandi di Jacob Bernoulli (consultabile gratuitamente su Internet Archive).

(dunque: $\int n^c = \sum_{k=1}^{n} k^c$). Sono state aggiunte parentesi per le attuali convenzioni sulla priorità delle operazioni, è stato utilizzato il fattoriale per esprimere in modo sintetico il prodotto degli interi consecutivi e le lettere A, B, C, D sono state sostituite da B_2, B_4, B_6, B_8 come si usa attualmente indicare quegli stessi numeri. Dato che quella sequenza continua all'infinito l'uso degli indici permette di superare il limite finito delle lettere di qualsiasi alfabeto. Questa formula,

indipendentemente dal valore dell'esponente c, indica un numero di addendi potenzialmente infinito che può facilmente essere capito seguendo elementari progressioni aritmetiche di ragione due. Tuttavia il numero effettivo di monomi da prendere in considerazione, crescente al crescere di c, non è indicato esplicitamente, ma è limitato dal fatto che tali momomi dipendono da fattori che diminuiscono progressivamente di una unità. Quando, inevitabilmente, si arriva a zero il prodotto complessivo, indipendentemente dagli altri fattori, è zero e il monomio si annulla. Ciò equivale a prendere in considerazione solo i monomi il cui esponente della variabile n sia strettamente positivo. Quindi, secondo tale regola, gli addendi contenenti potenze con esponenti negativi o nulli semplicemente non devono essere presi in considerazione.

3 Esempi di casi particolari

La forma (1), molto prossima alla versione originale, mantiene l'eccessiva lunghezza compensata, credo, da una maggiore chiarezza divulgativa. Prima di sintetizzarla ulteriormente, la useremo quindi per ricavare alcuni polinomi corrispondenti a particolari valori dell'eponente c.

Caso c=0

Bernoulli non prese in considerazione il caso $c = 0$, ma la sua formula, con la convenzione adottata, può funzionare ugualmente. Infatti sostituendo 0 al posto di c e ignorando nella formula gli addendi con esponente non positivo, rimane solo il primo addendo che diventa n. Risultato evidente se si considera, come si fa nei tempi moderni. che tutti gli n addendi con esponente 0 danno 1 per risultato. Quindi:

$$\sum_{k=1}^{n} k^0 = n$$

Caso c=1

Effettuando la sostituzione $c = 1$ gli addendi con esponente positivo sono solo due. Sottintendendo l'esponente 1 si hanno quindi i numeri triangolari risalenti alla scuola pitagorica:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Caso c=2

Con $c = 2$ l'esponente $c - 1$ è l'ultimo a risultare positivo. Si ha quindi un trinomio di terzo grado:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Caso c=3

Con $c = 3$ ci si ferma ancora al trinomio che però è di quarto grado.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

Caso c=9

Con $c = 9$ ci si ferma all'esponente $c-7$ ultimo a essere positivo. Abbiamo dunque un polinomio composto da sei monomi.

$$\sum_{k=1}^{n} k^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{1}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2$$

Notare che il coefficiente del monomio di secondo grado differisce, forse per un errore di stampa, da quello riportato in Figura 1.

Caso c=10

Con $c = 10$ entra in gioco anche il monomio con esponente $c-9$, implicito nella pagina, che diventa di primo grado coinvolgendo un quinto numero speciale che Bernoulli indicherebbe con E e noi con B_{10}:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + B_{10}n$$

Perché Bernoulli non lo esplicita insieme agli altri quattro dato che lo utilizza per l'ultimo dei polinomi mostrati?

Possiamo ipotizzare che abbia voluto lasciare al lettore il piacere di scoprirlo. $B_{10} = \frac{5}{66}$ perchè la somma dei coefficienti dei monomi di questi polinomi deve sempre dare 1. Infatti tutte le somme di potenze con un solo addendo danno questo risultato, essendo $1^n = 1$

4 Verifiche e dimostrazioni

Agevole verificare, quanto si vuole, che i polinomi forniti dalla formula calcolano effettivamente le somme di potenze di interi successivi. Non molto più complicato dimostrare per induzione matematica che ogni polinomio fornito dalla formula funziona per qualsiasi numero di addendi. Più complicato dimostrare la formula in generale tanto che Bernoulli non dimostrò la sua formula poi intitolata a Faulhaber, suo riconosciuto ispiratore (Faulhaber,1631). Si dovette attendere più di un secolo per avere, grazie agli sviluppi dell'analisi matematica e a Carl Jacobi, l'attesa dimostrazione. Dunque la formula funziona perfettamente. Perchè cambiarla?

5 Ulteriori sintesi

5.1 Fattoriale decrescente

Così come abbiamo già usato il fattoriale, per accorciare la nostra formula, possiamo utilizzare il simbolo indicante il fattoriale decrescente. Per esempio porremo

$$c^{\underline{5}} = c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)$$

dove il numero sottolineato posto a esponente indica il numero di fattori decrescenti.

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c^{\underline{1}}}{2!}B_2 n^{c-1} + \frac{c^{\underline{3}}}{4!}B_2 n^{c-3} + \frac{c^{\underline{5}}}{6!}B_2 n^{c-5} + \dots$$

A questo punto si può compattare ulteriormente usando il simbolo di sommatoria riferito a un generico addendo descritto in funzione dell'indice variabile:

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \sum_{k=1}^{\left[\frac{c}{2}\right]} \frac{c^{\underline{2k-1}}}{(2k)!}B_{2k} n^{c-2k+1} \tag{2}$$

Queste rappresentazioni che usano il fattoriale decrescente, benché assai fedeli all'originale, non vengono usate comunemente. Inoltre il simbolismo necessario non è ancora ben condiviso dalla comunità dei matematici. Sono invece ben condivisi sia il simbolo di fattoriale che quello di coefficiente binomiale che vedremo come coinvolgere nell'espressione di questa formula.

5.2 Coefficiente binomiale

$$\binom{c}{k} = \frac{c!}{k!(c-k)!}$$

Vedremo ora come, nei secoli, l'utilizzo dei coefficienti binomiali ha trasformato radicalmente l'aspetto della nostra formula. Considerando a titolo di esempio uno dei coefficienti dei monomi descritti da

Bernoulli, abbiamo la seguente identità:

$$\frac{c(c-1)(c-2)}{4!} = \frac{1}{c+1}\frac{(c+1)c!}{4!(c-3)!} = \frac{1}{c+1}\binom{c+1}{4}$$

La formula col fattoriale decrescente diventa così:

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{1}{c+1}\binom{c+1}{2}B_2 n^{c-1} + \frac{1}{c+1}\binom{c+1}{4}B_4 n^{c-3} +$$

$$+\frac{1}{c+1}\binom{c+1}{6}B_6 n^{c-5} + \frac{1}{c+1}\binom{c+1}{8}B_8 n^{c-7} + \dots$$

Compattando con la sommatoria:

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{1}{c+1}\sum_{k=1}^{[\frac{c}{2}]}\binom{c+1}{2k}B_{2k} n^{c-2k+1} \quad (3)$$

5.3 Estensione dei numeri di Bernoulli

A questo punto se si vuole migliorare la formula compattandola si deve ampliare la sequenza dei numeri di Bernoulli, a sua insaputa naturalmente.

lndici dispari

La prima naturale estensione è considerare uguali a zero i numeri con indice dispari superiore al due:

$$B_3 = 0, B_5 = 0, B_7 = 0, B_9 = 0, B_{11} = 0, \dots$$

Con questa convenzione si può migliorare la (2) e la (3). Il lettore può provare a scriverle prima di controllare il risultato:

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \sum_{k=2}^{c}\frac{c^{\underline{k-1}}}{k!}B_k n^{c-k+1} \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{1}{c+1} \sum_{k=2}^{c} \binom{c+1}{k} B_k n^{c-k+1} \quad (5)$$

lnizio della sequenza

Ponendo:

$$B_0 = 1, B_1 = \frac{1}{2}$$

abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1}\binom{c+1}{0} B_0 n^{c+1} + \frac{1}{c+1}\binom{c+1}{1} B_1 n^c + \frac{1}{c+1}\binom{c+1}{2} B_2 n^{c-1} +$$

$$+ \frac{1}{c+1}\binom{c+1}{3} B_3 n^{c-2} + + \frac{1}{c+1}\binom{c+1}{4} B_4 n^{c-3} + \frac{1}{c+1}\binom{c+1}{5} B_5 n^{c-4} + \ldots$$

o meglio utilizzando la sommatoria:

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1} \sum_{j=0}^{c} \binom{c+1}{j} B_j n^{c+1-j} \quad (6)$$

5.4 Un'inutile complicazione

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1} \sum_{j=0}^{c} (-1)^j \binom{c+1}{j} B_j n^{c+1-j} \quad (7)$$

Rispetto alla formula precedente (6) questa ha un fattore in più in $c+1$ addendi. Un artificio che ha l'unico scopo di cambiare segno a B_1, unico numero "bernoulliano" con indice dispari non nullo, perché definito in modo opposto al nostro, cioè $B_1 = -\frac{1}{2}$ invece di $B_1 = \frac{1}{2}$. Questa formula ha dominato per molto tempo, ed è ancora molto diffusa, ma ora finalmente i matematici riconoscono due diverse sequenze per i numeri di Bernoulli (OEIS,2026). Del tutto identiche tranne per il segno di B_1 . Per distinguere le due sequenze si possono indicare con B_j^+ e con B_j^- oppure semplicemente chiarendo, nei vari contesti, a quale delle due ci si riferisca. Se però non

si specifica la scelta, si deve intendere B_j^-, la prima sequenza a essere stata riconosciuta quando con Carl Jacobi (1804-1851) si arrivò, finalmente, alla dimostrazione della formula di Faulhaber (Jacobi, 1834) partendo non da questa ma da una funzione generatrice il cui sviluppo in serie infinita di potenze servì anche per definire i numeri bernoulliani.

$$\frac{x}{e^x - 1} =: \sum_{n=0}^{\infty} B_n^- \frac{x^n}{n!}$$

Ciò non dimostra che ci sia un valido motivo per discriminare la sequenza alternativa dato che:

$$\frac{-x}{e^{-x} - 1} =: \sum_{n=0}^{\infty} B_n^+ \frac{x^n}{n!}$$

Solo un cenno al fatto che le due formule generatrici sono due casi particolari di $\frac{xe^{xt}}{e^x-1}$, formula generatrice dei polinomi di Bernoulli $B_j(t)$. Infatti $B_j(0) = B_j^-$ e $B_j(1) = B_j^+$ (Luschny, 2013)

5.5 Una variante abbastanza nota

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^c = \frac{1}{c+1} \sum_{j=0}^{c} \binom{c+1}{j} B_j^- n^{c+1-j} \tag{8}$$

Qui abbiamo ancora la somma di n potenze di interi successivi, ma inizianti da 0. Questa volta la sequenza dei numeri di Bernoulli con $B_1 = -\frac{1}{2}$ calza perfettamente. Questo fatto è facile da spiegare, essendo $0^c = 0$, risulta:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^c = -n^c + \sum_{k=1}^{n} k^c$$

Dunque inserendo la (5), dopo aver sommato i due monomi simili, si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} - \frac{1}{2} n^c + \frac{1}{c+1} \sum_{k=2}^{c} \binom{c+1}{k} B_k n^{c-k+1} \tag{9}$$

Proseguendo come già visto si arriva alla (8)

5.6 Una variante poco nota

Dato che risulta:

$$\frac{1}{c+1}\binom{c+1}{j} = \frac{c!}{j!(c+1-j)!} = \frac{1}{c+1-j}\frac{c!}{(j)!(c-j)} = \frac{1}{c+1-j}\binom{c}{j}$$

Sostituendo nella (5) si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \sum_{j=0}^{c} \binom{c}{j} B_j^+ \frac{n^{c+1-j}}{c+1-j} \tag{10}$$

Per quanto visto nel precedente paragrafo abbiamo anche:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^c = \sum_{j=0}^{c} \binom{c}{j} B_j^- \frac{n^{c+1-j}}{c+1-j} \tag{11}$$

6 Usando matrici

6.1 Rappresentazione matriciale

Per ora abbiamo presentato i monomi dei polinomi ordinati secondo grado decrescente, ma usando le matrici conviene ordinarli per grado crescente. Questo per aiutare il passaggio a un'espressione matriciale sintetica. Per esprimere i primi quattro polinomi per la somma di potenze si scrive:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} k^0 \\ \sum_{k=1}^{n} k^1 \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \\ \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 \\ \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4 \end{bmatrix}$$

In queste equazioni compaiono vettori con quattro componenti e una matrice quadrata di 4 righe e 4 colonne. Il primo vettore contiene la somma di potenze di n addendi ed esponenti $0, 1, 2, 3$. Il secondo vettore contiene le potenze di n con esponenti progressivi

$1, 2, 3, 4$. La matrice contiene in ogni riga i coefficienti dei polinomi calcolanti le somme iniziando dal primo grado nella prima colonna. Per estrarre i polinomi basta moltiplicare le righe della matrice per la colonna delle potenze di n. Quando moltiplichiamo la prima riga della matrice per la colonna, elemento per elemento, sommando poi i risultati, otteniamo semplicemente n. Quindi:

$$\sum_{k=1}^{n} k^0 = n$$

Moltiplicando la seconda riga della matrice per la colonna delle potenze otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

Il polinomio genera i numeri triangolari che possono essere calcolati agevolmente con la stessa idea usata per calcolare l'area di un triangolo: calcolare l'area di un rettangolo (o parallelogramma) e poi dimezzare il risultato. Così forse fece il piccolo Carl Gauss che calcolò in un attimo il risultato mentre il suo maestro aveva pensato di tenere impegnata tutta la classe con la somma dei primi cento numeri, per poter svolgere tranquillamente le sue faccende. Moltiplicando la terza riga della matrice per la solita colonna delle potenze si ottiene l'identità già conosciuta e dimostrata da Archimede (287-212 a,C.)(Frajese, 1974):

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Con la quarta riga otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$

Un' identità che troviamo nel teorema di Nicomaco di Gerasa (60 circa - 120 circa)

Infine con la quinta riga, sempre moltiplicata per il vettore delle potenze, otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$

6.2 Una ricerca per gioco

Alla fine degli anni '70, coltivando l'apprendimento per scoperta, all'inizio della mia carriera di insegnante, prima di conoscere la formula di Faulhaber, decisi di indagare autonomamente per cercare di scoprire una legge che permettesse di ricavare, conoscendo i precedenti, i coefficienti del nuovo polinomio. Non conoscevo che pochi polinomi per il calcolo di somme di potenze. Ne trovai altri mediante interpolazione risolvendo sistemi lineari con l'algebra delle matrici, aiutato da una TI-59, una calcolatrice programmabile che precedeva di poco l'era dei computer personali. Man mano che acquisivo nuovi polinomi ebbi l'idea di sintetizzare i dati usando matrice e vettori come visto nel precedente paragrafo. Il mio scopo era di riuscire a prevedere la crescita della matrice dei coefficienti polinomiali anticipando il polinomio successivo non ancora trovato. In questo gioco alcuni coefficienti erano prevedibili facilmente, altri però apparivano del tutto caotici. A malincuore alla fine dovetti arrendermi rinunciando all'impresa che, tuttavia, nel tempo, si sarebbe rivelata molto utile.

6.3 Una scoperta semicasuale!

Passarono più di 15 anni. I computer erano ormai entrati nelle case e nelle scuole. Stavo progettando a casa per i miei studenti una esercitazione di laboratorio su foglio di calcolo per verificare trasformazioni che lasciano invariato il determinante di una matrice. Il caso volle che mi trovai sottomano il quaderno in cui molti anni prima avevo trascritto in forma matriciale i polinomi laboriosamente trovati. Conoscevo la potenza dell'algebra delle matrici e volli provare a invertire quella matrice ricavata con molta fatica che alla fine

mi aveva visto sconfitto. Non sapevo che senso avesse questa inversione e non avevo consapevolezza che servisse a qualcosa, ma, come ispirato, volli provare. Scrissi la matrice di 5 righe per 5 colonne relativa ai primi cinque degli infiniti polinomi calcolanti le somme di potenze di interi successivi, poi chiesi al foglio di calcolo di darmi l'inversa. La risposta richiese un attimo. Il risultato mi lasciò stupefatto! Tutto quel caos che non ero riuscito a capire, come per magia, era scomparso. Anche le frazioni erano tutte scomparse! Rimanevano numeri interi che nonostante i segni alternati e un'incompletezza, riconobbi subito!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

In sostanza si trattava di coefficienti binomiali. A parte l'alternanza dei segni appariva chiaramente il triangolo di Tartaglia benché privato dell'ultimo elemento di ciascuna riga! Improbabile una coincidenza, ma provai subito con una matrice più grande confermando l'inaspettata scoperta. Quella matrice che avevo trovato con tanta fatica poteva essere ottenuta invertendone una facilmente ottenibile dal triangolo di Tartaglia! (Pietrocola, 2026)

6.4 Una diversa formula di Faulhaber?

Il dubbio interrogativo non riguarda la correttezza della formula che ho dimostrato in diversi modi (Pietrocola, 2008, 2017, 2021, 2022, 2023) anche se, per motivi contingenti, molti anni dopo averla scoperta, ma l'attribuzione del nome che posso solo proporre. Ecco la veste con cui, dopo non pochi ripensamenti maturati nel tempo, ho pensato di presentarla:

$$\vec{S}(n) = \overline{A}^{-1}\vec{N}(n) \tag{12}$$

dove, per qualsiasi intero positivo m, $\vec{S}(n)$ e $\vec{N}(n)$ sono vettori con m elementi dipendenti da n e $\overline{A}$ è una matrice di m righe e m colon-

ne. Le componenti mediante gli indici (r, c) variabili da 1 a m sono così definite:

$$[\vec{S}(n)]_r = \sum_{k=1}^{n} k^{r-1}$$

$$[\vec{N}(n)]_r = n^r$$

$$[\overline{A}]_{r,c} = \begin{cases} 0 & \text{se } c > r \\ \binom{r}{c-1}(-1)^{r+c} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa nuova formula risolve il problema della somma di potenze di interi successivi senza ricorrere ai numeri di Bernoulli, ma utilizzando l'algebra delle matrici. Può fregiarsi del titolo di formula di Faulhaber o merita un nome specifico? Potrebbe anche chiamarsi formula di Edwards dato che, come scoprii molto tempo dopo la mia scoperta, fui preceduto negli anni '80 dal matematico e biologo britannico che dedusse le proprietà di questa matrice partendo da una identità di Blaise Pascal del 1654 usata proprio per risolvere ricorsivamente il problema della somma di potenze di interi successivi (Edwards 1982, 1987) In compenso spero ancora di essere stato il primo a generalizzare questa formula a una qualsiasi progressione aritmetica.

La mia formula generale

La mia formula generale usa la matrice A identica alla $\overline{A}$ tranne per i negativi diventati positivi. Eccola:

$$\vec{S}(n, h, d) = T(h, d)A^{-1}\vec{N}(n) \tag{13}$$

dove h primo elemento della progressione aritmetica e la differenza costante d, detta ragione, sono i parametri che individuano la particolare progressione aritmetica. Ecco anche vettore e matrice della formula non ancora definiti:

$$[\vec{S}(n, h, d)]_r = \sum_{k=0}^{n-1} (h + dk)^{r-1}$$

$$[T(h,d)]_{r,c} = \begin{cases} 0, & \text{se } c > r, \\ \binom{r-1}{c-1} h^{r-c} d^{c-1} & \text{se } c \leq r. \end{cases}$$

Nel caso particolare h=1 d=1 la formula risolve il problema della somma di potenze di interi successivi e mostra anche che:

$$T(1,1)A^{-1} = \overline{A}^{-1}$$

da cui

$$\overline{A}T(1,1) = A$$

Curiose relazioni tra matrici binomiali. Per esempio con matrici del quinto ordine si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

Interessante anche il caso particolare $h = 0$, $d = 1$. Essendo $T(0,1)$ l'elemento neutro del prodotto matriciale righe per colonna, la (13) diventa:

$$\vec{S}(n,0,1) = A^{-1}\vec{N}(n)$$

Ciò ci rivela che invertendo la matrice A si ottengono i coefficienti dei polinomi che calcolano la somma di n addendi, ma partendo da 0 invece che da 1. Tali coefficienti coincidono in tutto con i precedenti tranne per il segno cambiato nei monomi di un grado inferiore rispetto a quello del polinomio. La diagonale sotto la principale invece di avere elementi del valore di $\frac{1}{2}$ hanno valore opposto $-\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Notare che A^{-1} nella prima colonna ha la sequenza B_j^- invece di B_j^+ prima colonna di $\overline{A}^{-1}$.

6.5 Una proposta didattica

La mia impressione è che l'appellativo di formula di Faulhaber possa indicare qualsiasi ricetta per ottenere polinomi calcolanti somme di potenze di interi successivi.
Una ricetta didattica dovrebbe perseguire lo scopo di essere espressa nel modo più chiaro possibile. Con tale intento la mia proposta sfrutta l'esperienza vissuta cercando inutilmente un ordine che potesse spiegare la crescita della matrice dei coefficienti polinomiali al crescere del numero di polinomi consecutivi presi in considerazione. Ora, dopo aver fatto la conoscenza con la formula di Faulhaber, ho capito che la mia era una strada percorribile anche se non facile. Avrei dovuto sostituire quella matrice apparentemente imprevedibile con tre matrici facilmente prevedibili e poi moltiplicare gli elementi corrispondenti (prodotto di Hadamard, simbolo "$\circ$") per tornare alla matrice dei coefficienti polinomiali. Ecco la matrice dei coefficienti polinomiali con matrici del quarto ordine, facilmente estendibile ai casi successivi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} B_0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \end{bmatrix}$$

Rimane da chiarire quali siano i numeri di Bernoulli, ma questi si trovano facilmente imponendo che le somme di un solo addendo diano risultato 1 essendo $1^c = 1$. Ciò corrisponde al fatto che nella matrice dei coefficienti polinomiali la somma delle righe è sempre 1.

Il lettore provi a definire in generale questa formula, prima di leggere la soluzione:

$$\vec{S}(n) = (F \circ T \circ B)\vec{N}(n) \tag{14}$$

$$[\vec{S}(n)]_r = \sum_{k=1}^{n} k^{r-1}$$

$$[\vec{N}(n)]_r = n^r$$

$$[F]_{r,c} = \begin{cases} 0 & \text{se } c > r \\ \frac{1}{c} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$[T]_{r,c} = \begin{cases} 0 & \text{se } c > r \\ \binom{r-1}{c-1} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$[B]_{r,c} = \begin{cases} 0 & \text{se } c > r \\ B^{+}_{r-c} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si noti che questa formula nella sostanza corrisponde alla (10). Se si vuole invece una sostanziale corrispondenza con la (6) si ha la seguente equivalente alternativa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} B_0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1^{+} & B_0 & 0 & 0 \\ B_2 & B_1 & B_0 & 0 \\ B_3 & B_2 & B_1 & B_0 \end{bmatrix}$$

Come si vede cambiano due matrici. Nella prima le unità frazionarie progressive si ripetono, sempre più numerose su ogni riga invece che su ogni colonna. Nella seconda il triangolo di Tartaglia, invece di essere completo, manca del primo elemento di ogni riga.

7 Conclusione

Come il vedere un oggetto da vari punti di vista non confonde l'osservatore, ma lo arricchisce di conoscenze, favorendone la comprensione, così, attraverso le varie espressioni formulate, l'autore spera di essere riuscito ad avviare il lettore verso una comprensione matematica significativa e profonda della realtà immutabile che tutte queste indicano. Ciò pur essendosi limitato nella trattazione ad aspetti storici e didattici, omettendo le varie dimostrazioni, segnalate in bibliografia, indispensabili per godere pienamente della grande bellezza di questo problema dalla lunga storia e dal multiforme aspetto.

8 Bibliografia

1. Attilio Frajese (1974). *Opere di Archimede*, Spirali proposizione 10 p. 335. Torino: UTET

2. Janet Beery (2010). *Sum of powers of positive integers*. Mathematical Association of America (MMA).

3. Johannes Faulhaber (1631). Accademiae Algebrae. Internet Archive

4. Jacob Bernoulli (1713). *Summae potestatum In: Artis conjectandi*. Internet Archive. p.97

5. Carl Jacobi (1834) *De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae*. Journal für die reine und angewandte Mathematik.

6. A.W.F. Edwards. (1982). *Sums of powers of integers*. Mathematical Gazette 66

7. A.W.F. Edwards. (1987). *Pascal's arhitmetical triangle.The story of a mathematical idea,*. The Johns University pp.82-84

8. Giorgio Pietrocola (2008). *Esplorando un antico sentiero: teoremi sulle somme di potenze di interi successivi*. Maecla

9. Giorgio Pietrocola (2017). *On polynomials for the calculation of sums of powers of successive integers and Bernoulli numbers deduced from Pascal's arithmetical triangle*. Academia.edu

10. Giorgio Pietrocola (2021). *Matrici binomiali per il calcolo di somme potenze*. Archimede 4,2021

11. Giorgio Pietrocola (2022). *Matrici binomiali per polinomi calcolanti somme di potenze con basi in progressione aritmetica*. MatematicaMente n.298, n.299

12. Giorgio Pietrocola (2023). *From binomial matrices to various theorems on the extension of Faulhaber's formula, on Bernoulli numbers and polynomials*. Academia.edu

13. OEIS (2026). Fondata da Neil Sloane nel 1996. *on-Line Encyclopedia of Integer Sequences,*
$B_1 = -\frac{1}{2}$: A027642 A027641 , $B_1 = +\frac{1}{2}$: A164555 A027641

14. Giorgio Pietrocola (2026).*Insegnando polinomi e matrici, Attrazione e tardive scoperte sulla scia di un problema classico*, III Convegno "MatEleatica" Intrecci e confronti tra le Scienze Matematiche e le Scienze Umanistiche, Roma: UniverItalia.

15. Peter Luschny (2013) *The Bernoulli Manifesto*

Periodico di Matematica (V) Anno XLI Vol.I(2) settembre 2026, pp.131-134

Una dimostrazione euclidea della proprietà di riflessione dell'ellisse

Franco Gioacchino*

DOI:10.53159/PdM(V).v1n2.177

Ricevuto 2-07-2026 Accettato 29-09-2026 Pubblicato 30-09-2026

Abstract: *Scientists and engineers have long utilized the reflective properties of conic sections in technological applications. One need only consider the burning mirrors—massive parabolic reflectors—traditionally said to have been used by Archimedes in the 3rd century BC to defend Syracuse against Roman ships. In contrast, the potential applications of the ellipse's reflective property remain not yet fully explored; here, a Euclidean proof is presented, accompanied by GeoGebra diagrams—a modern substitute for the traditional straightedge and compass.*

Keywords: euclidean; demonstration; ellipse; reflection

Sommario: *Le proprietà di riflessione delle coniche sono state utilizzate da tempo immemorabile da scienziati e ingegneri per fare tecnologia. Basti pensare agli specchi ustori utilizzati, secondo la tradizione, da Archimede per difendere Siracusa dalle navi romane nel III secolo a.C, sfruttando gigantesche parabole. Ancora non*

*Liceo "Marie Curie" Giulianova (TE) Italia; mail unamassa@gmail.com.

del tutto esplorate, invece, le possibilità di utilizzo della proprietà di riflessione dell'ellisse, di cui qui è data una dimostrazione euclidea corredata dai grafici Geogebra , moderno succedaneo di riga e compasso.

Parole chiave: dimostrazione; euclidea; riflessione; ellisse

Lemma 0.1. *Dati un'ellisse E di fuochi A e B sia 2s la misura del suo asse maggiore e sia C la circonferenza di centro A e raggio 2s. La tangente t a E in un suo punto P è l'asse del segmento BC, dove C è l'estremo del raggio della circonferenza C passante per P.*

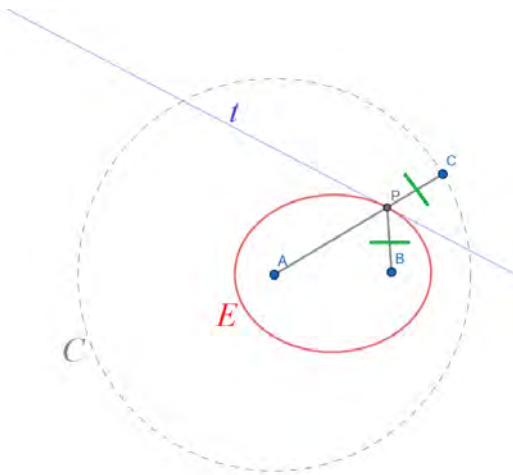


Fig.1

Dimostrazione. Per definizione di ellisse $\overline{AP} + \overline{PB} = 2s$, così come, per ipotesi, $\overline{AP} + \overline{PC} = 2s$. Dunque AP + PB ≅ AP + PC, da cui, per differenza di segmenti congruenti,

PB ≅ PC (Fig. 1)

Ne segue che P, essendo equidistante da B e da C, appartiene all'asse t di BC, o, equivalentemente, l'asse t di BC passa per il punto P

dell'ellisse E.
Per dimostrare che t è tangente all'ellisse proveremo che nessun altro punto di t appartiene a E.
Sia dunque Q un punto di t diverso da P. Poiché t è l'asse di BC sarà QB $\cong$ QC (Fig. 2), e perciò AQ + QB $\cong$ AQ + QC . Per la disuguaglianza triangolare riferita al triangolo AQC sarà inoltre $\overline{AQ} + \overline{QC} > \overline{AC}$. Ricordando che $\overline{AC} = 2s$ concludiamo che, essendo anche $\overline{AQ} + \overline{QB} > 2s$, Q ha la somma delle distanze dai fuochi di E maggiore di 2s, e pertanto Q $\notin E$.

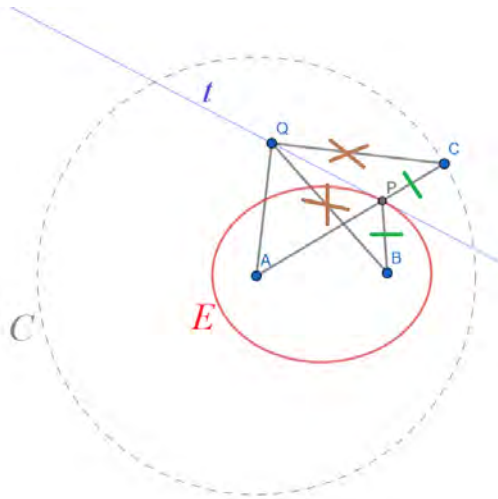


Fig.2

□

1a legge della riflessione
Raggio incidente, raggio riflesso e normale alla superficie riflettente nel punto di incidenza giacciono nello stesso piano.

2a legge della riflessione
L'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione.

Lemma 0.2. *Il raggio luminoso emesso da uno dei fuochi di un'ellisse E viene riflesso dalla curva sull'altro fuoco.*

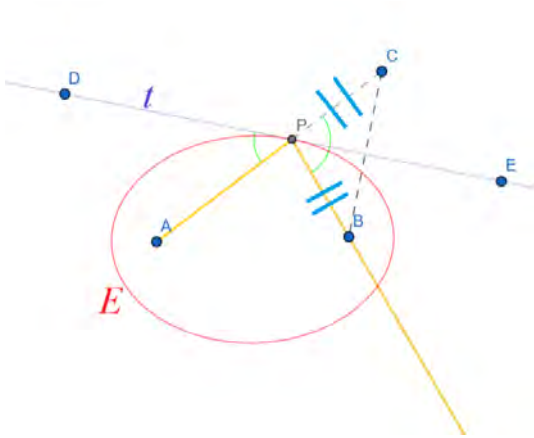


Fig.3

Dimostrazione. Tracciamo la tangente t all'ellisse E nel punto P in cui il raggio luminoso AP, emesso dal fuoco A, incontra la conica: si forma l'angolo $\widehat{DPA}$. Alla luce della 2° legge di riflessione il teorema sarà dimostrato se proveremo che $\widehat{DPA} \cong \widehat{EPB}$ (Fig. 3).
Per il lemma 1 la tangente t a E nel suo punto P è l'asse di BC e pertanto, per il noto teorema, è bisettrice dell'angolo al vertice $\widehat{BPC}$ del triangolo isoscele BPC , così che

$$\widehat{CPE} \cong \widehat{EPB}$$

D'altra parte

$$\widehat{DPA} \cong \widehat{CPE}$$

perché angoli opposti al vertice, e dunque, per la proprietà transitiva della congruenza,

$$\widehat{DPA} \cong \widehat{EPB}$$

□

Profili biografici degli autori

Vittorio Bovolin (Salerno) - v.bovolin@unisa.it

Ingegnere Civile sottosezione Idraulica, Professore Associato di Idraulica presso il Dipartimento di Ingegneria Civile della Università di Salerno. Titolare del Corsi di Idraulica per Ingegneri Civili (Laurea 1° Livello) e di Idraulica Ambientale e Fluviale per Ingegneri Ambientali (Laurea Magistrale) e docente ai Corsi di Dottorato. In ambito storico è autore di pubblicazioni che trattano la storia della Idraulica e delle Costruzioni Idrauliche, in particolare, durante il periodo Borbonico. Più specificamente in ambito Idraulico si è interessato alla analisi del contenuto tecnico dei testi della Pneumatica di Filone di Bisanzio e della Pneumatica di Erone di Alessandria. Più recentemente ha intrapreso uno studio sistematico del contenuto del Trattato di Archimede sui Corpi Galleggianti pubblicando due Memorie. La prima Memoria, che riguarda il contenuto del Primo Libro del Trattato, ha inteso chiarire che il cosiddetto "Principio di Archimede" è in effetti un insieme di Teoremi dimostrati e non un Principio indimostrato o basato sulla semplice esperienza empirica. La seconda Memoria, che riguarda il contenuto del Secondo Libro del Trattato, i ha inteso investigare la possibilità che, per la definizione degli enunciati del Secondo Libro, Archimede si possa essere avvalso anche di "macchine grafiche"

Ferdinando Casolaro (Napoli) –
presidente.anfsu@liceocaccioppoli.edu.it.

È stato professore di Matematica nella Scuola Secondaria di secondo grado e, dal 1988/89 docente a contratto presso varie Università. Dalla seconda metà degli anni 'Novanta' al

2020 ha tenuto corsi di Analisi Matematica presso l'Università del Sannio ed il Dipartimento di Architettura dell'Università di Napoli "Federico II". Dal 1973 è socio Mathesis, associazione di cui è stato consigliere e Segretario nazionale e, nel periodo 2017-2019, Presidente della sezione di Napoli. È autore di oltre centotrenta pubblicazioni scientifiche su riviste nazionali e internazionali e vari libri. È Direttore di redazione del "Periodico di Matematica", Editorial Board della Rivista Science & Philosophy e del "Bollettino" dell'Accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU). In ambito di ricerca, si è interessato in passato di Analisi Matematica con risultati relativi a "problemi di decisione per integrali indefiniti". Attualmente, i suoi interessi riguardano questioni legate alle geometrie non euclidee, con particolare riferimento a modelli utilizzati per la Relatività Generale, alle geometrie finite con relativi gruppi di trasformazioni ed a tutte le questioni legate alla presentazione dell'Analisi Matematica attraverso gli aspetti grafici. Nel 2023 ha fondato (ed è Presidente per il triennio 2023-2025) l'Associazione Napoletana di Filosofia e Scienze Umane "R. Caccioppoli" - indicata sinteticamente con ANFSU - ispirata dalla Accademia AFSU in Teramo con la quale è gemellata.

Giuseppe D'Angelo - sitdang010762@gmail.com

Laureato in Scienze Agrarie, ha conseguito l'abilitazione all'esercizio professionale di Agronomo e l'abilitazione all'insegnamento in Scienze Naturali. Docente a tempo indeterminato presso il liceo Scientifico Statale "Leonardo" di Giarre (CT). Ha collaborato saltuariamente con la rivista scientifica «Coelum Astronomia», nella quale ha pubblicato recentemente

l'articolo *Il paradosso di olbers: un metodo per conoscere il numero di stelle che popolano l'universo*, e con il «Periodico di Matematica» con l'articolo: *Se le calotte polari si sciolgono…..* È autore di varie pubblicazioni su diverse altre riviste («La Chimica nella Scuola», «La tecnica della Scuola», «Linx Magazine») e del saggio *Lo Spazio Polisimmetrico* – prima edizione Ed. Book Sprint (cod ISBN 978-88-6823-1729). È autore di varie pubblicazioni su diverse altre riviste («La Chimica nella Scuola», «La tecnica della Scuola», «Linx Magazine», «ArteScienza», «La Ricerca») e di alcuni saggi.

Franco Eugeni (Teramo) – eugenif3@gmail.com.

Coordinatore PHD. Già professore ordinario di Discipline Matematiche e di Logica e Filosofia della Scienza in varie Università (Modena, L'Aquila, Chieti, Milano, Roma). È stato presidente nazionale della Società Italiana di Matematica e Fisica "Mathesis", direttore di dipartimento e delegato rettorale per la Didattica. È membro onorario della "Romanian Society for Fuzzy Systems" a Iasi. Direttore dei periodici telematici «Ratio Mathematica», «Eiris (Epistemologia dell'Informatica e Ricerca Sociale)», «SEM Bollettino dell'AFSU, Vol. I (1), 2018.(Skills for Economic Management)», «Divulgazione della Scienza e della Filosofia». È stato Presidente dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV, fondata nel 1598). È presidente dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU). È condirettore dei periodici «Science & Philosophy» e «Bollettino dell'AFSU» ed è fondatore della rinata rivista "Periodico di Matematica", dopo 100 anni dalla sua chiusura nel 1918. È membro dei Consigli Scientifici delle Riviste «Italian J. of Applied Mathematics» e «J.of Interdisciplinary Mathematics». È stato membro dei Consigli Scientifici dei «Rendiconti di Matematica» e del «Journal of Optimization and Economic Science». È Commendatore della Repubblica e professore onorario nell'Università A. Cuza di Iasi (Romania). Per le ricerche vedasi il sito Research Gate.

Franco Gioacchino (Giulianova) - unamassa@gmail.com

Nato a Teramo nel 1962, si è laureato con lode in Matematica con indirizzo informatico all'Università de L'Aquila, discutendouna tesi sull'aspetto combinatorio delle variabili aleatorie, relatore il prof. Mauro Cerasoli. Per tre anni ha lavorato come sistemista programmatore assembler presso la SO.GE.I di Roma. Ha conseguito quattro abilitazioni all'insegnamento e nel 1992 è entrato in ruolo come docente di Matematica al Liceo Scientifico "F. Severi" di Frosinone; nel 2007, a seguito di passaggio di cattedra, è stato trasferito al Liceo Classico "S. Staffa" di Trinitapoli dove ha insegnato matematica e fisica fino al 2018. Dopo due anni di docenza all'estero al Liceo "Vermigli" di Zurigo, dal 2020 è in ruolo presso il Liceo "Marie Curie" di Giulianova. Nel 2001 ha pubblicato sul «Periodico di Matematiche» l'articolo "Una dimostrazione euclidea della proprietà di riflessione del paraboloide". Ha creato il sito "francogioacchino.altervista.org" dove raccoglie lezioni ed esercizi svolti di matematica e fisica.

Luca Nicotra (Roma) – luca.nicotra1949@gmail.com.

Laureato in Ingegneria Meccanica a pieni voti all'Università "Sapienza" di Roma. Giornalista iscritto all'Ordine Nazionale dei Giornalisti albo pubblicisti dal 2008. Autore di circa 450 articoli, culturali, tecnici e di divulgazione scientifica, e di vari libri fra cui: *Bruno de Finetti: un matematico scomodo* (coautore Fulvia de Finetti) Livorno: Belforte, 2008, la prima biografia mondiale del grande scienziato; *Ingegneria Assistita dal Computer, vol. 1.*(coautore F. Campana) Roma: UniversItalia, 1ed. 2012 e 2ed. 2014; *Nello specchio dell'altro: riflessi della bellezza tra arte e scienza* (coautore Rosalma Salina Borello) Roma: Universitalia, 2011; *Quasicristalli. Intrecci segreti fra natura, arte e scienza* (coautori C. Francou e U. Locatelli) Roma, UniversItalia, 2017. Ha svolto attività di ricerca nel campo della trasmissione del calore presso l'Istituto di Fisica Tecnica dell'Università "Sapienza" di Roma e nel settore dei sistemi di

guerra elettronica nell'industria della difesa (Elettronica S.p.A. – Roma). È esperto di sistemi computerizzati per la progettazione e produzione meccanica e ha svolto una intensa attività di formatore di progettisti meccanici presso molte importanti industrie nazionali. Dal 2014 tiene annualmente il "Corso Mechanical Design con CATIA V5" al Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale dell'Università "Sapienza" di Roma. È Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", membro onorario dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV) e dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU), membro del comitato scientifico della rivista «Science & Philosophy», fondatore e direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale della casa editrice UniversItalia di Roma, per la quale cura la collana *Scienza e Cultura*. Dirige anche le collane *Ingegneria Industriale Assistita dal Computer* e *Il filo della conoscenza* per la casa editrice Inriga di Bologna, con la quale ha pubblicato i libri *La progettazione meccanica con CATIA V5* (2023), *Le fasi del ciclo di vita del prodotto. Il ruolo dell'informatica* (2023), *La verità in matematica. Da Gödel a Euclide* (2024), *CAM-CAPP. La produzione assistita dal computer* (coautore Sandro Turchetta) (2025), *Dai robot alla fabbrica automatizzata* (coautore Donato Orlandi) (2025), *La gestione dello sviluppo di un prodotto industriale. PDM-PLM* (coautore Riccardo Salvatore) (2025). Per le ricerche si veda il sito Research Gate.

Giorgio Pietrocola - giorgio.pietrocola@gmail.com.

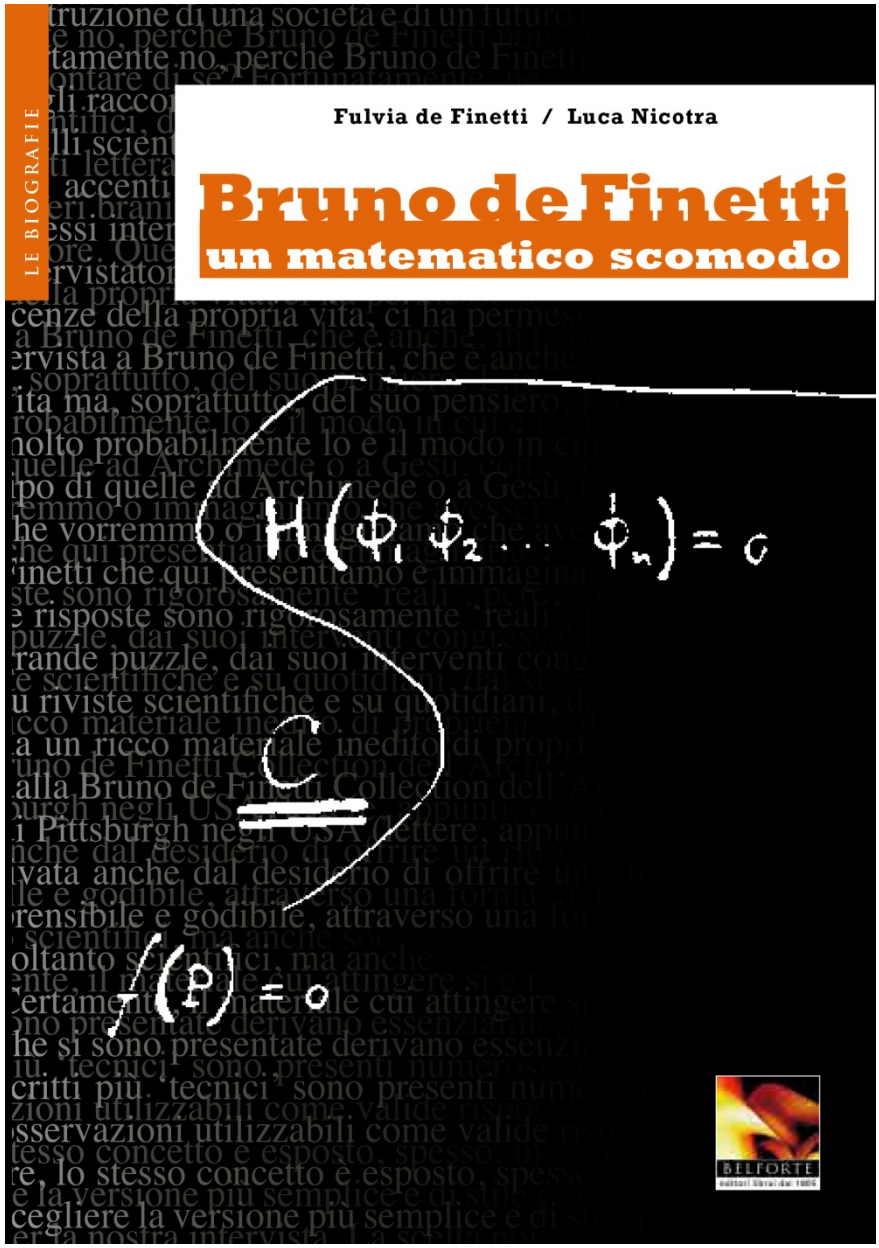
Laurea in matematica all'università "Sapienza" di Roma. Inizia la carriera come addetto alle esercitazioni nel corso di Analisi Matematica della facoltà di Architettura di Roma. Dopo il servizio militare insegna nelle scuole medie superiori fino al 2007 anno del pensionamento. Contemporaneamente svolge lavoro di programmatore realizzando anche software didattico. Si interessa

al linguaggio Logo e alla filosofia educativa di Seymour Papert e crea nel proprio istituto un laboratorio di Matetica, Alla fine degli anni '90 collabora alla direzione e conduce workshop nei corsi di Perfezionamento Educazione e Tecnologie alla LUMSA di Roma Nel 2000, è tra gli autori e i curatori del libro Apprerndimento e nuove strategie educative Edizioni Unicopli. Su Internet nel 2005 idea erealizza il Tartapelago, un sito divulgativo, con animazioni didattiche di natura geometrica costruite mediante il linguaggio Logo. Dopo il pensionamento si diletta nella ricerca, si occupa soprattutto del problema classico della somma di potenze di interi successivi, facendo diverse scoperte alcune delle quali sembrano essere originali. Questa attività sfocia nella pubblicazione di articoli su riviste specializzate in matematica e in didattica nonché nella partecipazione a diversi convegni nazionali.

Pietro Velonà (Reggio Calabria) – pvelona74@gmail.com.

Ha conseguito la laurea in Ingegneria Civile e il Dottorato in Ingegneria dei Trasporti presso l'Università Mediterranea di Reggio Calabria, occupandosi dell'analisi dei modelli di processo deterministico per la simulazione dell'assegnazione dei flussi di traffico alle reti di trasporto. È autore di oltre quaranta articoli e coautore con il Prof. Giulio Erberto Cantarella, ordinario di Sistemi di Trasporto presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Salerno, di due libri: *Assegnazione a reti di trasporto, Modelli di punto fisso* (2010) e *Assegnazione a reti di trasporto, Modelli di processo deterministico* (2020). Possiede l'abilitazione all'insegnamento nella scuola secondaria di secondo grado per la classe di concorso A027 (Matematica e Fisica). Insegna presso l'IIS "P. Mazzone" di Roccella Jonica (RC). Anche in ambito scolastico, coltiva la passione per lo studio e la ricerca e, per diffondere l'interesse per le proprie discipline, ha scritto, da solo e con altri autori, diversi volumi: *Matematica tra verità e bellezza* (2012), *Approfondimenti teorici di funzioni matematiche* (2013), *Per un pugno di*

Fisica (2014), *Approfondimenti teorici di cinematica* (2016), *C'era una volta...la Relatività Ristretta* (2017), *Ritorno alla Relatività Ristretta* (2019), *Ricerche di fisica* (2022). Inoltre, ha pubblicato due articoli sul Giornale di Fisica: *Una nuova idea di laboratorio per capire la relatività ristretta (*2019), *Analisi di un fenomeno in sistemi di riferimento non solidali* (2021).


LE BIOGRAFIE
Fulvia de Finetti / Luca Nicotra
Bruno de Finetti
un matematico scomodo
BELFORTE